$\mathbb{TFJM}^2$

Problèmes du 13ème Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens

VERSION 1.3 MISE À JOUR LE 12 DÉCEMBRE 2024

Préambule

Ces problèmes sont difficiles et sont proposés par des chercheurs et étudiants en mathématiques. Ils n'admettent pas toujours, à la connaissance du jury, de solution complète mais sont accessibles à des lycéens, c'est-à-dire que les auteurs sont certains qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Le jury n'attend pas des candidats qu'ils résolvent entièrement un problème, mais qu'ils en comprennent les enjeux, résolvent des cas particuliers, repèrent les difficultés et proposent des pistes de recherche. Attention, les questions ne sont pas toujours classées par ordre croissant de difficulté. Enfin, il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes : chaque équipe peut en refuser un certain nombre sans pénalité. On se reportera au règlement pour plus de détails.

 En cas de questions concernant le tournoi ou les énoncés, consulter le site `www.tfjm.org` ou contacter les organisateurs à l'adresse `contact@tfjm.org`.

Table des matières

Mots-clés :
1. Mot-clé 2. Mot-clé 3. Mot-clé 4. Mot-clé 5. Mot-clé 6. Mot-clé 7. Mot-clé 8. Mot-clé 9. Mot-clé

Notations

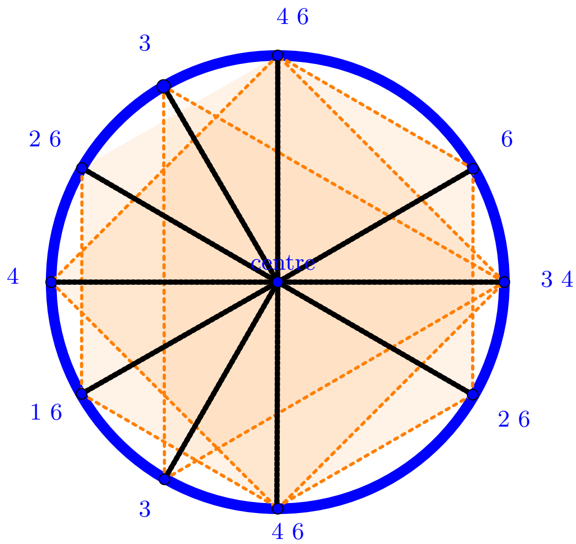
$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ensemble contenant les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$

1. Plats à tarte gradués

Lors d'un tournoi de tartes, différentes familles veulent faire des découpages en parts égales. Chaque famille va fabriquer son propre moule à tarte sur lequel elle va indiquer des graduations qui correspondent aux endroits où il faut découper entre le centre et la graduation pour former des parts égales. C'est à dire que pour un nombre $u \in \mathbb{N}^*$, on va faire apparaître u fois un trait avec le numéro u indiqué sur le bord du moule à tarte formant un u-gone régulier inscrit dans le cercle.

Bien sûr, un même moule doit pouvoir avoir plusieurs graduations parce que le nombre u de parts de tarte qu'on voudra faire n'est pas toujours le même suivant le nombre de convives. On note alors N le nombre de numéros de graduations différentes qu'on veut faire apparaître et $S = \{u_1, \cdots, u_n\}$ l'ensemble des numéros qu'on veut faire apparaître. On peut identifier le moule à tarte à un cercle (car on ne veut faire que des tartes rondes) et les graduations à des points de ce cercle.

Par exemple, le plat à tarte de graduations $S = \{1,2,3,4,6\}$ peut être gradué en



Il y a donc 10 graduations sur le plat à tarte avec au plus 2 au même endroit sur cet exemple.

1. Soit a et b deux entiers naturels distincts. On prend $N = 2$, $u_1 = a$ et $u_2 = b$ de sorte que $S = \{a,b\}$. Quel est le nombre minimal de graduations à mettre sur le moule à tarte afin d'être capable de couper la tarte à la fois en a parts égales ou en b parts égales ?

2. On veut maintenant $N = 3$ graduations, c'est-à-dire que $S = \{a,b,c\}$ avec $a,b,c \in \mathbb{N}^*$ deux à deux distincts. Quel est le nombre minimal de graduation à mettre sur le plat à tarte afin d'être capable de couper la tarte à la fois en a parts égales, b parts égales ou c parts égales ?

Désormais, il y a différentes familles qui s'affrontent dans un tournoi de graduations de moules à tarte. Chacun famille doit choisir N valeurs distinctes à graduer $S = \{u_1, \ldots, u_N\}$.

- La famille **Première** choisit de graduer les N premiers nombres premiers, soit $S_N^p = \{p_1, p_2, \cdots, p_N\}$.
- La famille **Géométrique** choisit un entier $a \geqslant 2$ et de graduer les puissances de a, soit $S_N^g = \{1, a, a^2, \cdots, a^{N-1}\}$.
- La famille **Complète** choisit de graduer les N premiers nombres entiers naturels, soit $S_N^c = \{1, 2, \cdots, N\}$.

— La famille **Divisée** choisit le plus petit entier α_N qui admet exactement N diviseurs $\delta_{1,\alpha_N},\ldots,\delta_{N,\alpha_N}$ et choisit de graduer les N diviseurs de α_N, soit $S_N^d=\{\delta_{1,\alpha_N},\cdots,\delta_{N,\alpha_N}\}$.

Par exemple, si $N=6$, on a :

— $S_6^p=\{2,3,5,7,11,13\}$.

— $S_6^g=\{1,2,4,8,16,32\}$ pour $a=2$.

— $S_6^c=\{1,2,3,4,5,6\}$.

— $S_6^d=\{1,2,3,4,6,12\}$ car $\alpha_6=12$.

3. Les familles choisissent qu'il existe un point d'origine du cercle sur lequelle toutes les graduations apparaissent, combien y aura-t-il alors G_N^p (resp. G_N^g,G_N^c,G_N^d) de graduations, pour la famille Première (resp. Géométrique, Complète, Divisée), sur le plat à tartes. Donner un encadrement le plus précis possible pour G^p (resp. G^g,G^c,G^d).

Les épaisseurs des traits de graduation posent des problèmes de lecture. Les familles veulent donc mettre le moins possible de graduations sur le plat à tartes. Elles se demandent si toutes les faire démarrer à la même origine est vraiment le plus efficace.

4. Peut-on trouver un exemple d'une famille $S_N^u=\{u_1,\cdots,u_N\}$ pour lequel il est possible de faire mieux quand les graduations ne démarrent pas toutes au même endroit si $N=3$? si $N=4$? pour un N assez grand ?

Dans ce cas, estimer aussi précisément que possible le nombre $\widehat{G}_N^u$ de graduations qu'on peut mettre en fonction de N et de $S=\{u_1,\ldots,u_N\}$.

5. Lorsque ce minimum est atteint, pour chacune des quatre familles précédemment décrite, combien doit-on mettre de graduations au même endroit au minimum ?

6. Existe-t-il un entier N tel que pour $n>N$, l'ordre entre les $\widehat{G}^p$ (resp. $\widehat{G}^g,\widehat{G}^c,\widehat{G}^d$ fini par être toujours le même. Si oui, quel est cet ordre ?

7. Existe-t-il une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, on a $S_N^u\leqslant\min(S_N^p,S_N^g,S_N^c,S_N^d)$?

8. Proposer et explorer d'autres pistes de recherche.

* * *

2. Drôles de toboggans

Dans un centre de loisirs, la direction a confié à l'ingénieure Emmy la construction d'une haute tuyauterie de toboggans de hauteur $H\in\mathbb{N}$ mètres. En haut, ses tuyaux présentent N entrées alignées et numérotées de 1 à N, de même qu'en bas il y a N sorties alignées et numérotées de 1 à N. Pour que ce soit plus amusant, Emmy dispose des tuyaux suivants :

— des tuyaux droits, qu'on nommera **tuyaux de type** I, tels que ce qui rentre en position K sort également en position K ;

— des paires de toboggans voisins qui se croisent sans se rencontrer et échangent leurs sorties, qu'on nommera **paire de tuyaux de type** $\mathcal{Z}$: c'est-à-dire que ce qui rentre en position K sort en position $K+1$, et ce qui rentre en position $K+1$ sort en position K ;

— des paires de toboggans voisins qui fusionnent en un seul puis se séparent, qu'on nommera **paire de tuyaux de type** $\mathcal{X}$: c'est-à-dire que ce qui rentre en position K s'additionne avec ce qui rentre en position $K+1$, et le total ressort en proportions égales en K et $K+1$.

À chaque mètre, Emmy place une rangée composée d'une combinaison de son choix de tels tuyaux.

Pour le spectacle, on fait entrer une quantité totale de 1 litre d'eau dans les entrées, selon une répartition à fixer ultérieurement. Ensuite, l'eau descend dans les toboggans en suivant les

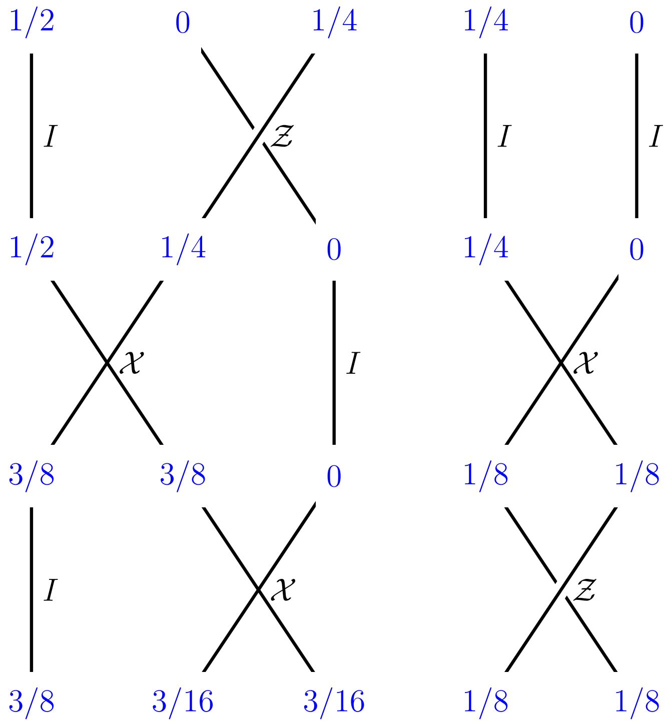


FIGURE 1 – Une tuyauterie de toboggans de hauteur $H = 3$ avec $N = 5$ entrées. Les quantités d'eau à chaque étage sont indiquées en bleu, et le type de tuyau est indiqué à droite de chaque tuyau ou paire de tuyaux.

règles ci-dessus. Enfin, l'eau débouche dans les tuyaux de sortie. On trouvera un exemple sur la figure 1.

1. Emmy souhaite que de l'eau sorte par toutes les sorties en même temps. Pour quelle(s) valeur(s) de N et H cela est-il possible si

a) elle peut choisir où rentre l'eau ;

b) elle fait rentrer la même quantité d'eau dans tous les tuyaux ;

c) l'eau rentre dans le tuyau en position 1 ;

d) 1/2 litre d'eau rentre dans le tuyau 1 et 1/2 litre d'eau rentre dans le tuyau N.

2. Pour que le spectacle soit grandiose, Emmy voudrait qu'il sorte la même quantité d'eau de tous les toboggans. Pour quelles valeurs de N et H est-il possible de construire des toboggans qui font sortir la même quantité d'eau par toutes les sorties si

a) l'eau rentre dans le tuyau 1 ;

b) la répartition de l'eau est arbitraire, et la construction du toboggan est indépendante de la répartition. Plus précisément, Emmy souhaite construire une tuyauterie de toboggans telle que, pour tout choix de répartition de l'eau en entrée, la tuyauterie fasse sortir la même quantité d'eau par toutes les sorties.

3. Pour cette question uniquement, le décor penche légèrement et, en traversant une paire de tuyaux de type $\mathcal{X}$, l'eau qui rentre en position K ou $K+1$ ressort en proportion P dans la position K et $(1-P)$ dans la position $K+1$, avec $0 \leqslant P \leqslant 1$. Reprendre la question 2. dans ce cadre.

4. Emmy choisit que toute l'eau rentre dans le tuyau 1 uniquement. On appelle **spectacle** la liste des quantités d'eau $(x_1, ..., x_N)$ qui sortent de chaque tuyau, où x_i est la quantité d'eau qui sort du tuyau numéroté i. Par exemple, le spectacle correspondant à la figure 1 est : $\left(\frac{3}{8}; \frac{3}{16}; \frac{3}{16}; \frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right)$.

a) En fonction de N et H, combien de spectacles différents Emmy peut-elle réaliser ?

b) Emmy a appris qu'un collègue facétieux a décidé de mélanger les entrées juste avant le spectacle, après la construction de la tuyauterie (l'eau pourrait donc rentrer par n'importe quel tuyau, pas nécessairement le 1). Elle souhaite construire une tuyauterie qui réalise le spectacle qu'elle a choisi, indépendamment du tuyau par lequel son collègue fera rentrer l'eau. Combien de spectacles peut-elle réaliser dans ces conditions, toujours en fonction de N et H ?

c) Suite à une pénurie de matériel, Emmy ne dispose que d'une quantité limitée M de paires de tuyaux de type $\mathcal{X}$. En contrepartie, elle peut choisir H aussi grand qu'elle le souhaite, les tuyaux (ou paires de tuyaux) I et $\mathcal{Z}$ étant quant à eux disponibles en abondance. Combien de spectacles différents peut-elle réaliser dans ces conditions, en fonction de M et N ? (Heureusement, son collègue a décidé de la laisser tranquille pour cette fois.)

5. Emmy s'aperçoit que, si les spectateurs sont placés trop loin, ceux-ci ne peuvent pas distinguer deux spectacles qui diffèrent par une quantité d'eau suffisamment petite. Plus précisément, étant donné un $\varepsilon > 0$ fixé, on dit qu'Emmy réalise le spectacle $(x_1, ..., x_N)$ **en apparence** lorsque la quantité d'eau $(y_1, ..., y_N)$ qui sort effectivement des tuyaux vérifie $|x_i - y_i| \leqslant \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. On suppose toujours que Emmy fait rentrer toute l'eau dans le tuyau 1.

a) En fonction de $\varepsilon > 0$ et N, quels spectacles Emmy peut-elle réaliser en apparence, si elle peut choisir H comme elle le souhaite ?

b) Reprendre le point a) si on fixe également H.

6. Le collègue d'Emmy est de retour pour l'ennuyer, mais cette fois-ci, Emmy dispose de nouveaux tuyaux pour l'aider. Plus précisément, elle dispose de tuyaux en Y à gauche, dits de type $\mathcal{Y}$ (respectivement à droite, dits de type $\reflectbox{$\mathcal{Y}$}$[1]), qui rassemblent l'eau rentrant en position K et $K+1$ pour la faire ressortir entièrement en K (respectivement en $K+1$). On trouvera une illustration à la figure 2. Combien de spectacles Emmy peut-elle réaliser (de façon exacte) dans ces conditions, en fonction de N et H ?

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

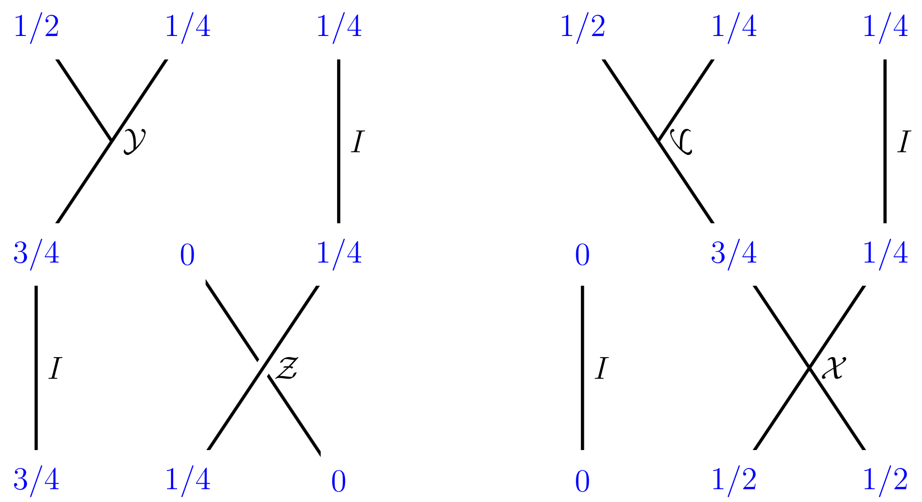


Figure 2 – Portions de tuyauteries avec des tuyaux $\mathcal{Y}$ et $\reflectbox{$\mathcal{Y}$}$

* * *

1. Si vous utilisez LaTeX, ce symbole peut s'obtenir en composant `\reflectbox{$\mathcal{Y}$}`, la commande `reflectbox` donnant l'image miroir de son argument.

3. Titre

Énoncé

1. Première question

2. Deuxième question

3. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

4. Le cauchemar de la ligne 91-06

Dans une contrée lointaine, les conditions de trafic se sont considérablement dégradées sur la ligne de bus 91-06, qui relie une importante gare ferroviaire à la cité universitaire, au grand dam des étudiants. On assiste notamment à des scènes spectaculaires où un bus est tellement bondé qu'il ralentit d'arrêt en arrêt, pour finir par se faire rattraper par celui qui le suit, avec parfois trois bus consécutifs se suivant à la queue leu leu. Face à ce problème, la société des transports TRAP a mandaté Antoine pour effectuer une analyse d'efficacité et proposer des pistes d'amélioration. La situation étant plutôt complexe (c'est le moins qu'on puisse dire !), Antoine décide de travailler sur un modèle simplifié. Il considère la ligne 91-06 comme une ligne droite, avec le dépôt situé en 0, puis un arrêt en chaque entier $n \geqslant 1$ (le dépôt n'est donc pas considéré comme un arrêt). Après quelques observations, il lui apparaît que les bus se déplacent à une vitesse moyenne maximale V_0, mais que leur vitesse moyenne diminue à mesure qu'ils chargent des passagers. Antoine conjecture que la vitesse moyenne d'un bus contenant k passagers (le chauffeur ne compte pas comme un passager) est donnée par

$$V_k = \frac{V_0}{1+\ln(k+1)}. \tag{1}$$

(Antoine considère que les bus se déplacent constamment à leur vitesse moyenne, et le temps passé aux arrêts est compris dans cette vitesse moyenne. Autrement dit, il fait comme si les bus se déplaçaient constamment à vitesse V_k, et lorsqu'ils atteignent un arrêt, ils embarquent tous les passagers qui s'y trouvent et changent de vitesse instantanément.) Les bus ne peuvent pas se dépasser : lorsqu'un bus rattrape son prédécesseur, il le suit à la même vitesse que lui (y compris si cela implique de rouler à une vitesse inférieure à sa vitesse moyenne), et en arrivant à un arrêt, les passagers sont répartis équitablement entre les bus (s'il devait y avoir plus de bus que de passagers, en supposant qu'il y a N passagers, chacun des N bus les moins remplis recevrait un passager).

1. Dans un premier temps, Antoine s'intéresse à ce qui se produit aux heures de pointe. Il considère qu'il y a N passagers à chaque arrêt, et que ceux-ci ne se remplissent pas par la suite (ce qui correspond à dire qu'il y a tant de passagers aux arrêts que le remplissage sur la période étudiée est négligeable).

a) Deux bus quittent le dépôt, le premier au temps $t=0$, le second au temps $t=1$. Finissent-ils par se rattraper ?

b) Antoine se demande si cette réponse dépend de sa modélisation de la vitesse. Reprendre le point 1 si V_k peut être donnée par une expression quelconque, et non nécessairement celle en (1). (On supposera juste que V_k est décroissante en k, car il est raisonnable de penser que les bus ralentissent s'ils sont davantage chargés.)

2. Antoine se demande à présent ce qui se passe lorsque la journée commence, et que les arrêts se remplissent progressivement. Il considère donc toujours deux bus, un démarrant au temps $t=0$, et un démarrant au temps $t=1$. Au temps $t=0$, les arrêts sont tous vides, et se remplissent à un taux constant de ρ passagers par unité de temps. Lorsqu'un bus arrive à un arrêt, il récupère tous les passagers qui y sont arrivés depuis le passage du bus précédent, soit ρ multiplié par le temps écoulé (on permet un nombre non entier de passagers, pour simplifier la modélisation). Reprendre la question précédente dans ce cadre, et considérer également le cas où on fait démarrer m bus, le premier au temps $t = 0$, et ensuite un par unité de temps.

3. Antoine étant bien conscient que la modélisation qui précède ne tient pas compte des petits aléas de la circulation ou des afflux imprévus de passagers, il souhaite désormais les inclure. Il considère donc les variantes suivantes.

a) Au temps $t = T$, le bus de tête est immobilisé pendant un intervalle de temps de $\frac{1}{10}$ en raison d'un embouteillage, avant de reprendre à vitesse normale.

b) Au temps $t = T$, une quantité q de passagers arrive à l'arrêt situé en $n = 10$ en plus du remplissage normal (par exemple, suite à l'arrivée d'un TGV, dont les passagers souhaitent rallier la cité universitaire en bus...).

Toujours dans le cas de deux bus séparés d'une unité de temps, évaluer l'impact des deux perturbations ci-dessus sur la suite de leur parcours. (On discutera les résultats en fonction de T et q.)

4. Antoine souhaite à présent concevoir une stratégie pour retenir les bus aux heures de pointe, afin d'éviter qu'ils ne se rattrapent. On suppose donc à présent que, lorsqu'ils arrivent aux arrêts (et uniquement à ce moment), les bus peuvent s'arrêter et attendre un temps arbitraire avant de repartir à leur vitesse normale. Une **stratégie** est une façon pour les bus de décider, en connaissance de la position de tous les bus et du nombre de passagers qu'ils transportent, du temps à attendre lorsqu'ils arrivent à un arrêt. Dans le cadre de la question 1a), existe-t-il une stratégie pour retenir les bus de façon à ce que le second ne rattrape jamais le premier ? Le cas échéant, une telle stratégie peut-elle être choisie de façon à améliorer le temps de parcours voyageur (c'est-à-dire que certains passagers iraient de l'arrêt où ils sont montés à un arrêt ultérieur plus vite que si cette stratégie n'était pas mise en œuvre) ?

5. Antoine souhaite ajouter encore davantage de réalisme à son modèle, et tenir compte du fait que les bus font plusieurs rotations sur le même trajet. Il considère donc que la ligne se termine à l'arrêt $n = 20$, considéré comme le dépôt de fin de ligne. Il n'y a aucun passager à cet arrêt, lorsqu'un bus l'atteint, il se vide de tous ses passagers, et repart dans l'autre sens. Il effectue ensuite des allers et retours sur le trajet, et à chaque fois qu'il atteint le dépôt en $n = 0$ ou en $n = 20$, il dépose tous ses passagers et repart dans l'autre sens. Il considère également qu'au temps $t = 0$, il y a N passagers à chaque arrêt et dans chaque sens, et qu'ensuite, les arrêts continuent à se remplir à un taux de ρ passagers par unité de temps.

On suppose que deux bus circulent sur la ligne, partant tous deux du dépôt en $n = 0$, le premier au temps $t = 0$, le second au temps $t = 1$. Existe-il une stratégie pour retenir les bus aux arrêts de façon à éviter qu'ils ne se rattrapent ? Que se passe-t-il dans le cas de m bus ? Discuter de l'optimalité d'une éventuelle stratégie par rapport au temps de parcours voyageur.

6. Antoine cherche à explorer une dernière idée pour améliorer le temps de parcours voyageur. On se place à nouveau dans le cadre de la question 2, avec deux bus circulant, et où les arrêts sont initialement vides et se remplissent progressivement. Antoine propose que le premier bus desserve uniquement les arrêts impairs, et le second uniquement les arrêts pairs.

a) Cette stratégie présente-t-elle un gain en termes de temps de parcours voyageur ? Le quantifier aussi précisément que possible.

b) Pour pousser son idée encore plus loin son idée, Antoine suppose à présent qu'un bus démarre à chaque temps t entier, et que les bus parcourent les arrêts de k en k. Plus précisément, le premier bus dessert les arrêts multiples de k, le suivant les arrêts multiples de k plus 1, et ainsi de suite. Après k bus, le schéma se répète : le $(k+1)$-ème bus dessert les arrêts multiples de k, le $(k+2)$-ème bus dessert les arrêts multiples de k plus 1, et ainsi de suite. Quantifier le gain éventuel en termes de temps de parcours voyageur, et examiner ce qui se produit lorsque $k \to +\infty$.

c) Antoine décide de pousser son idée encore plus loin, et d'ajouter des arrêts, pour répartir les voyageurs sur davantage d'arrêts. Il suppose donc qu'il y a à présent un arrêt en $\frac{n}{k}$ pour chaque entier $n \geqslant 1$, et que les voyageurs arrivent aux arrêts à un taux de $\frac{\rho}{k}$ passagers par unité de temps. On considère toujours qu'un bus quitte le dépôt à chaque unité de temps. Quantifier l'impact de ce changement sur le temps de parcours voyageur, à la fois dans le cas où chaque bus dessert tous les arrêts ou dans le cas où les bus desservent les arrêts de k en k. On s'intéressera particulièrement à ce qui se produit à la limite lorsque $k \to +\infty$.

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

5. Le poids des graphes

Alexandra et Guillaume jouent avec des graphes. Un **graphe** est un ensemble de sommets avec un ensemble d'arêtes, c'est-à-dire que certains pairs de sommets sont liées.

Étant donné un graphe G à n sommets, ils numérotent les sommets de 1 à n. Le **poids d'une arête** est le produit des deux nombres écrits aux sommets de l'arête. Le **poids d'une numérotation** est la somme de tous les poids des arêtes. Figure 3 montre deux exemples.

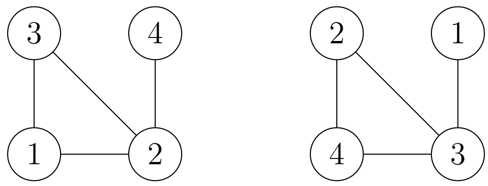


FIGURE 3 – A gauche, un exemple de poids 19. A droite un exemple de poids 29.

Alexandra cherche les numérotations qui maximisent le poids, tandis que Guillaume cherche à le minimiser.

1. Quelle est la valeur maximale et minimale pour le graphe du carré, illustré dans la Figure 4 ?

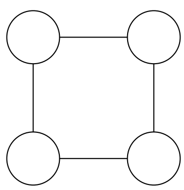


FIGURE 4 – Le graphe du carré.

2. Quelle est la valeur maximale et minimale dans les cas suivants (voir aussi Figure 5) :
a) le graphe complet K_n (où $n \geqslant 2$), où toutes les pairs de sommets sont reliées par une arête.
b) le graphe des pairs P_n avec $2n$ sommets (où $n \geqslant 2$), regroupés par pairs.
c) le graphe A_n à n sommets (où $n \geqslant 3$), formant un anneau.

3. Que se passe-t-il pour le graphe G_n à n^2 sommets (où $n \geqslant 2$), formant une grille d'un carré de côté n (voir Figure 6) ?

4. Trouver des formules ou estimations pour le poids maximal et minimal d'un graphe quelconque.

Alexandra et Guillaume décident de changer la définition du poids d'une arête. Au lieu d'utiliser le produit des deux numéros aux sommets extrémaux, ils utilisent une fonction f. Le poids d'une numérotation reste la somme des poids de toutes les arêtes.

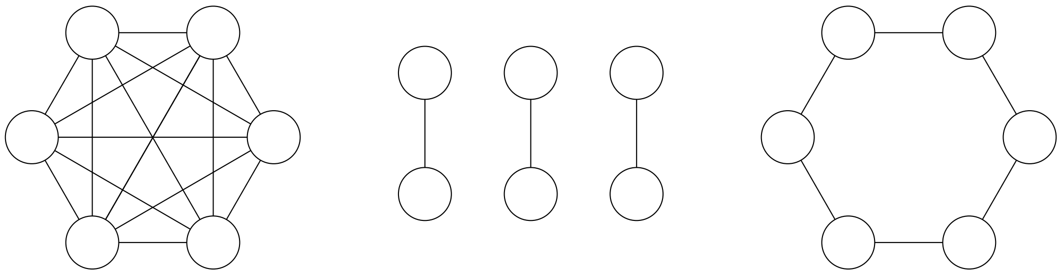


Figure 5 – Les graphes K_6 (à gauche), P_3 (au milieu) et A_6 (à droite).

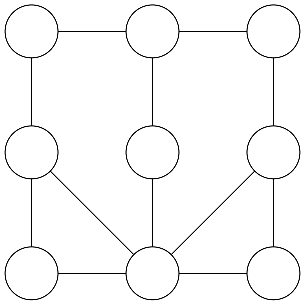


Figure 6 – Le graphe G_3.

5. Reprendre les questions précédentes où on utilise pour la fonction f le maximum.

6. Reprendre les questions précédentes où on utilise pour la fonction f le plus grand commun diviseur (pgcd).

7. Reprendre les questions précédentes où on utilise pour la fonction f le plus petit commun multiple (ppcm).

8. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

6. Gerrymandering

Elbridge cherche à déplacer les capitales des différents districts vers les emplacements qui avantagent son parti, en le moins d'années possible.

Soit P une partie du plan, qui représente un pays, et $n \geq 2$. On appelle **configuration** un choix de n points A_1, A_2, …, A_n, qui représentent les capitales des districts. A chaque configuration est associée un **découpage** de P, où le district D_i est constituée de l'ensemble des points strictement plus proches de A_i que de tous les autres points.

Chaque année, Elbridge peut déplacer, simultanément, chaque capitale A_i vers un nouvel emplacement $A'_i \in D_i$. On dit alors que $(A'_1, \ldots, A'_n)$ est **réalisable** à partir de $(A_1, \ldots, A_n)$ en 1 année. Plus généralement, on définit, pour une configuration C', le fait d'être réalisable à partir de C comme le fait qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ tels que C' soit réalisable à partir de C en a années. Voir Fig. 7.

Dans un premier temps, on se place dans le cas où P est un cercle centré en l'origine.

1. A partir d'une configuration donnée, quelles configurations sont réalisables ?

2. On fixe n. On part de la configuration C où les capitales forment un polygone régulier centré en l'origine. La configuration où chaque capitale occupe la position symétrique par rapport à l'origine est-elle réalisable ? Si oui, déterminer (aussi précisément que possible), en fonction de n, la plus petite valeur de a telle qu'elle soit réalisable en a années.

3. On fixe n et un demi-cercle M de P. Existe-t-il une valeur e telle que, pour toute configuration C, il existe une configuration réalisable en a années où toutes les capitales appartiennent à M ?

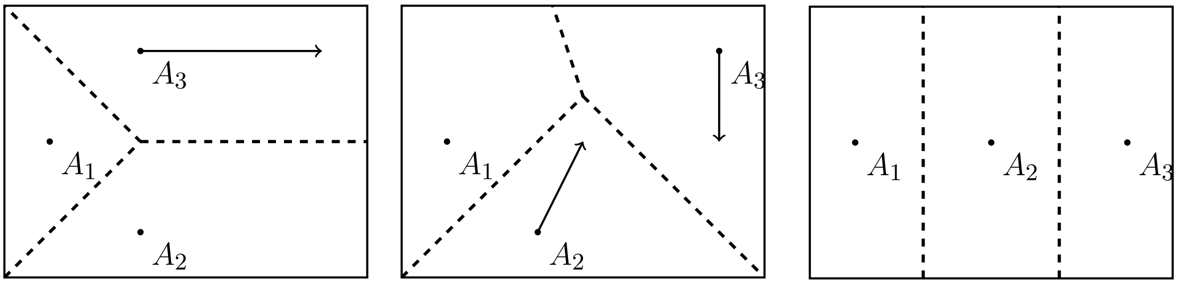


FIGURE 7 – Exemple où P est l'intérieur d'un rectangle et $n = 3$. La troisième configuration est réalisable à partir de la première en 2 années (mais pas en 1 seule).

Si oui, déterminer (aussi précisément que possible), en fonction de n, la plus petite valeur de a qui convient.

4. On fixe n. Existe-t-il une valeur a telle que, pour toute configuration C et toute configuration C' réalisable à partir de C, C' est réalisable en a années à partir de C ? Si oui, déterminer (aussi précisément que possible), en fonction de n, la plus petite valeur de a qui convient.

5. Reprendre les questions précédentes, où P est le plan entier. Dans la question 3, M est un demi-plan.

6. Généraliser au cas des dimensions supérieures.

7. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

7. Titre

Énoncé

1. Première question

2. Deuxième question

3. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

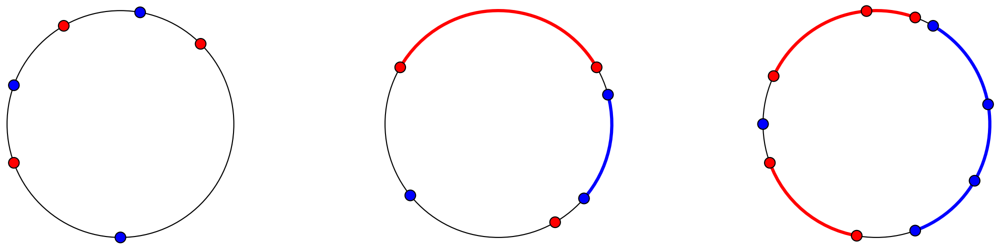
* * *

8. Points colorés sur un cercle

Lucie a inventé un jeu. Les règles sont les suivantes.

Le jeu se déroule sur un cercle. Au départ, les points du cercle sont *non colorés*. L'un des deux adversaires est désigné pour jouer en premier. Chacun leur tour, Lucie et son adversaire jouent (c'est à dire, choisissent) un point, qui sera alors coloré en leur couleur respective : Rouge pour Lucie, Bleu pour son adversaire. Lorsqu'ils jouent, il leur est interdit de choisir un point qui a déjà été coloré par l'un d'eux. Lucie convient à l'avance du nombre de coups que la partie durera. Tous deux jouent le même nombre de coups, de sorte que le *nombre de coups* est un entier pair, noté $2n$. Par exemple, si le *nombre de coups* vaut $2n = 6$ coups, ils joueront $n = 3$ coups chacun. La partie s'arrête donc lorsque les $2n$ coups sont joués.

À la fin de la partie, le cercle est découpé en arcs de cercle dont les extrémités sont soit rouge, soit bleu. Dans une telle configuration, un *arc primitif* est un arc dont les deux extrémités sont colorées (en rouge ou en bleu) et dont tous les autres points ne sont pas colorés (par exemple, le cercle tout entier, vu comme un arc de cercle, n'est jamais primitif). Les arcs primitifs dont les deux extrémités sont rouges sont alors colorés en rouge, et ceux dont les extrémités sont toutes deux bleues sont colorés en bleu. Le gagnant est alors celui étant parvenu à former l'arc de cercle **non nécessairement primitif** le plus long entièrement coloré de sa propre couleur. S'il y a égalité de tels arcs, ou s'il n'en existe aucun, la partie est déclarée nulle.



Exemple 1 Exemple 2 Exemple 3

Les configurations ci-dessus représentent deux fins de partie pour $2n = 6$ et une pour $2n = 10$. Dans le premier exemple, il n'y a pas d'arcs colorés, parce qu'il n'y a pas d'arc primitif. La partie est alors nulle. Dans le second exemple, Lucie (en rouge) gagne car elle a réussi à construire un arc de taille maximale. Dans le troisième exemple, l'adversaire (en bleu) gagne parce qu'il a formé un arc (non primitif) bleu de taille maximale.

Dans tout le problème, on appelle *stratégie* une manière déterministe de décrire de jouer en fonction des coups qui ont été joués précédemment. Autrement dit, une stratégie est un algorithme qui indique quel coup jouer en fonction de la situation courante, de sorte que, dans deux situations identiques, il indiquera toujours le même coup à jouer.

Comme Lucie n'aime pas perdre, elle commence par se choisir pour adversaire l'Idiot du Village. Ce dernier portant bien son nom, il joue ses coups **aléatoirement**, sans réfléchir. Chaque coup joué suit alors une *loi uniforme* sur le cercle. Lucie cherche alors des stratégies qui *maximisent* sa probabilité de gagner contre cet adversaire.

Lucie et son adversaire conviennent de commencer par fixer $2n = 4$.

1. Montrer que si Lucie laisse son adversaire jouer en premier, elle peut gagner à tous les coups.

2. Après qu'elle ait gagné une partie, son adversaire la laisse jouer en premier.

a) Lucie dispose-t-elle d'une stratégie lui garantissant de gagner ?

b) Lucie dispose-t-elle d'une stratégie lui garantissant de ne jamais perdre ?

c) Démontrer que Lucie dispose d'une stratégie lui garantissant une probabilité de gagner de $3/4$.

d) Peut-elle faire mieux ?

e) Démontrer que, pour tout $p \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$, il existe une stratégie garantissant à Lucie de gagner avec une probabilité de p.

f) Déterminer l'ensemble des $p \in [0,1]$ tels qu'il existe une stratégie permettant à Lucie de gagner avec une probabilité de p. Cet ensemble est-il égal à $[0,1]$?

g) Même question pour pour les probabilités de ne pas perdre.

3. Lucie et son adversaire choisissent désormais $2n > 4$.

a) Étudier l'ensemble des $p \in [0,1]$ tels qu'il existe une stratégie permettant à Lucie de gagner avec une probabilité de p.

b) Et pour les probabilités de ne pas perdre ?

Lucie propose un pacte à son adversaire. Ils conviennent d'un entier $p \geqslant n$, et les règles sont changées de sorte que l'adversaire de Lucie place p points plutôt que n. Comme la règle du tour-par-tour est alors difficile à appliquer, ils conviennent que l'adversaire de Lucie placera tous ses points en premier. Ce dernier joue toujours aléatoirement sur le cercle, mais *avant*

Lucie, de sorte que cette dernière a alors toute la liberté de choisir où placer ses points. Lucie a donc plus d'information que son adversaire, mais en contrepartie, ce dernier peut placer plus de points qu'elle.

4.

a) Montrer que s'il existe une stratégie permettant à Lucie de gagner à coup sûr, alors $n \geqslant 1 + \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor$.

b) Lucie dispose-t-elle d'une stratégie optimale ? Discuter selon la valeur de n et p.

Pour essayer, Lucie et son adversaire reprennent exactement la même configuration que la précédente, mais en échangeant les rôles. Lucie place p points, son adversaire en place n. Ce dernier joue toujours aléatoirement, et Lucie place tous ses points en premier. De plus, cette fois-ci, on n'impose plus $p \geqslant n$.

5.

a) Quelle configuration naturelle Lucie est-elle alors fortement tentée de jouer ? Quelle est alors sa probabilité de gagner ?

b) Cette stratégie est-elle optimale ? Si oui, le démontrer.

Fatiguée de jouer avec l'Idiot du Village, Lucie se trouve un adversaire à sa taille : Lucien. L'un des deux joueurs est désigné pour jouer en premier, et $2n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

6. Démontrer qu'aucun des deux joueurs ne dispose alors de stratégie gagnante.

Lucie et Lucien parviennent à convaincre $k \geqslant 1$ joueurs supplémentaires de jouer avec eux. Ils ont chacun une couleur et jouent chacun leur tour, toujours suivant les mêmes règles ; le nombre total $(k+2)n \in \mathbb{N}^*$ de points joués au cours de la partie étant fixé.

7. L'un des joueurs a-t-il une stratégie gagnante ?

8. Lucie se demande : que dire des questions précédentes si elle avait convenu dès le départ que le gagnant était non pas celui ayant l'arc le plus long, mais celui étant parveni à maximiser la somme des longueurs des arcs de sa couleur ?

9. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

9. À vos dés, prêt, jouez !

Soit $p \geqslant 2$, $f \geqslant 2$ et $n \geqslant 1$. Clémentine joue avec p dés à 6 faces dans un jeu en plusieurs tours, où l'objectif est de maximiser un gain G. Au premier tour ($n = 1$) de sa partie, elle lance tous les dés et les regroupe ensuite par valeur (tous les dés montrant "1", tous les dés montrant "2", etc.). Elle sélectionne ensuite un groupe de dés, dont elle additionne les valeurs pour les ajouter à son gain, puis recommence avec les dés restants.

Voici un exemple de déroulement de la partie pour 6 dés :

— <u>Premier tour :</u> Clémentine lance les dés et obtient 1, 4, 4, 5, 2, et 2. Elle regroupe les résultats en $\{1\}$, $\{2,2\}$, $\{4,4\}$ et $\{5\}$. Elle choisit d'utiliser le groupe $\{4,4\}$ et ajoute 8 à son gain, ce qui donne $G_1 = 8$.

— <u>Deuxième tour :</u> Il reste à Clémentine 4 dés. Elle les lance et obtient 2, 3, 5 et 1. Elle regroupe les résultats en $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ et $\{5\}$. Elle choisit d'utiliser le groupe $\{5\}$, ce qui ajoute 5 à son gain, donc $G_2 = 5$.

— <u>Troisième tour :</u> Clémentine lance les 3 dés restants et obtient 2, 2, et 1. Elle décide d'utiliser le groupe $\{2,2\}$, ce qui lui rapporte 4 de plus, soit $G_3 = 4$.

— <u>Quatrième tour :</u> Elle lance son dernier dé et obtient un 6. Elle ajoute cette valeur à son gain, soit $G_4 = 6$.

Le gain total de Clémentine à la fin de cette partie est donc $G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 = 23$.

Dans un premier temps, on suppose que Clémentine joue avec des pièces, c'est-à-dire le cas $f = 2$ où "pile" correspond à 1 et "face" à 2. Clémentine suit alors une stratégie simple : à chaque tour, elle choisit toujours le groupe de pièces montrant "face". Si aucune "face" n'est obtenue, elle est contrainte de prendre le groupe de "pile".

1. Quel est l'encadrement du gain possible au premier tour ? à la fin du jeu ?

2. Quelle est la probabilité que la partie finisse en 1 seul tour ?

3. Combien de tours durent en moyenne une partie ?

4. Quel est le gain moyen à un tour fixé n en fonction du nombre de dé restant au début du tour pour cette stratégie ?

On suppose maintenant que Clémentine joue avec des dés à un nombre quelconque f de faces, les valeurs allant de 1 à f. Clémentine envisage différentes stratégies :

a) À chaque tour, Clémentine ajoute à son gain le groupe de dés avec le cardinal le plus élevé.

b) À chaque tour, Clémentine ajoute à son gain le groupe de dés avec le cardinal le plus faible.

c) À chaque tour, Clémentine ajoute à son gain le groupe de dés avec la somme des valeurs la plus élevée.

d) À chaque tour, Clémentine ajoute à son gain le groupe de dés avec la valeur maximale .

Si plusieurs groupes remplissent les critères de la stratégie choisie, Clémentine sélectionne celui qui maximise son gain immédiat ou utilise le moins de dés.

5. Les stratégies proposées sont-elles optimales ?

6. Existe-t-il des cas où une stratégie serait clairement meilleure qu'une autre ? Donner des exemples.

7. Peut-on proposer une nouvelle stratégie, ou un mélange des stratégies précédentes, qui serait plus efficace ? Si oui, dans quels cas ?

EN fait je suis finalement pas fan des faces différentes.... si on veut optimiser on met des 6 partout sauf sur une face... si on veut minimiser idem avec 1 et 2...

Enfin, pour aller plus loin, on considère le cas où les dés ont f faces personnalisées avec des valeurs quelconques $f_1, f_2, \dots, f_f$. On appelle dé trivial, un dé où toutes ses faces sont identiques. On suppose que les dés ne peuvent pas être triviaux ici.

? ?

Je préférais ton idée de face interdite. On peut poser que nos $f - 1$ faces sont ok d'obtenir mais la face f est interdite (arbitrairement la plus grande ou la plus petite, j'ai pas l'impression que ça change grand chose...)

Une nouvelle règle vient compliquer la partie : une face interdite $1 \leqslant v \leqslant f$ est définie avant le début du jeu. Si cette face apparaît sur au moins un dé lors d'un lancer, la partie s'arrête immédiatement, et Clémentine perd tout gain non comptabilisé avant ce tour.

Voici un exemple de déroulement de la partie pour 6 dés à 6 faces, où la face interdite est 6 :

— Premier tour : Clémentine lance les dés et obtient 1, 4, 4, 5, 2, et 2. La face interdite 6 n'apparaît pas. Elle regroupe les résultats en $\{1\}$, $\{2,2\}$, $\{4,4\}$ et $\{5\}$. Elle choisit d'utiliser le groupe $\{4,4\}$ et ajoute 8 à son gain, ce qui donne $G_1 = 8$.

— Deuxième tour : Il reste à Clémentine 4 dés. Elle les lance et obtient 2, 3, 5, et 6. La face interdite 6 est obtenue, donc la partie s'arrête immédiatement, et Clémentine perd les gains restants de ce tour.

Dans cet exemple, le gain final de Clémentine est $G = G_1 = 8$.

8. Quel est le gain possible au premier tour ?

On suppose maintenant que le dé n'est pas équilibré et que la face interdite à une probabilité $prob_v$ d'apparaître. Les autres faces ont la même probabilités d'être obtenues.

9. Combien de tours la partie dure-t-elle en moyenne, en fonction de p, f, et de la probabilité d'apparition de la face interdite $prob_v$?

10. Comment adapter les stratégies précédentes, données à la question 3, à la présence d'une face interdite ?

11. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *