$\mathbb{TFJM}^2$

Problèmes du 13ème Tournoi Français
des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens

VERSION 1.3 MISE À JOUR LE 30 NOVEMBRE 2024

Préambule

Ces problèmes sont difficiles et sont proposés par des chercheurs et étudiants en mathématiques. Ils n'admettent pas toujours, à la connaissance du jury, de solution complète mais sont accessibles à des lycéens, c'est-à-dire que les auteurs sont certains qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Le jury n'attend pas des candidats qu'ils résolvent entièrement un problème, mais qu'ils en comprennent les enjeux, résolvent des cas particuliers, repèrent les difficultés et proposent des pistes de recherche. Attention, les questions ne sont pas toujours classées par ordre croissant de difficulté. Enfin, il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes : chaque équipe peut en refuser un certain nombre sans pénalité. On se reportera au règlement pour plus de détails.

 En cas de questions concernant le tournoi ou les énoncés, consulter le site `www.tfjm.org` ou contacter les organisateurs à l'adresse `contact@tfjm.org`.

Table des matières

Mots-clés :
1. Mot-clé 2. Mot-clé 3. Mot-clé 4. Mot-clé 5. Mot-clé 6. Mot-clé 7. Mot-clé 8. Mot-clé 9. Mot-clé

Notations

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ensemble contenant les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$

1. Titre

Énoncé

1. Première question

2. Deuxième question

3. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

2. Titre

Énoncé

1. Première question

2. Deuxième question

3. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

3. Titre

Énoncé

1. Première question

2. Deuxième question

3. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

4. Titre

Énoncé

1. Première question

2. Deuxième question

3. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

5. Titre

Énoncé

1. Première question

2. Deuxième question

3. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

6. Titre

Énoncé

1. Première question

2. Deuxième question

3. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

7. Titre

Énoncé

1. Première question

2. Deuxième question

3. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

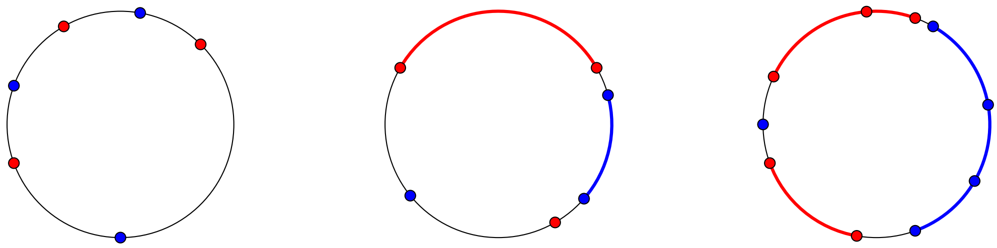
* * *

8. Points colorés sur un cercle

Lucie a inventé un jeu. Les règles sont les suivantes.

Le jeu se déroule sur un cercle. Au départ, les points du cercle sont *non colorés*. L'un des deux adversaires est désigné pour jouer en premier. Chacun leur tour, Lucie et son adversaire jouent (c'est à dire, choisissent) un point, qui sera alors coloré en leur couleur respective : Rouge pour Lucie, Bleu pour son adversaire. Lorsqu'ils jouent, il leur est interdit de choisir un point qui a déjà été coloré par l'un d'eux. Lucie convient à l'avance du nombre de coups que la partie durera. Tous deux jouent le même nombre de coups, de sorte que le *nombre de coups* est un entier pair, noté $2n$. Par exemple, si le *nombre de coups* vaut $2n = 6$ coups, ils joueront $n = 3$ coups chacun. La partie s'arrête donc lorsque les $2n$ coups sont joués.

À la fin de la partie, le cercle est découpé en arcs de cercle dont les extrémités sont soit rouge, soit bleu. Dans une telle configuration, un *arc primitif* est un arc dont les deux extrémités sont colorées (en rouge ou en bleu) et dont tous les autres points ne sont pas colorés (par exemple, le cercle tout entier, vu comme un arc de cercle, n'est jamais primitif). Les arcs primitifs dont les deux extrémités sont rouges sont alors colorés en rouge, et ceux dont les extrémités sont toutes deux bleues sont colorés en bleu. Le gagnant est alors celui étant parvenu à former l'arc de cercle **non nécessairement primitif** le plus long entièrement coloré de sa propre couleur. S'il y a égalité de tels arcs, ou s'il n'en existe aucun, la partie est déclarée nulle.



Exemple 1 Exemple 2 Exemple 3

Les configurations ci-dessus représentent deux fins de partie pour $2n = 6$ et une pour $2n = 10$. Dans le premier exemple, il n'y a pas d'arcs colorés, parce qu'il n'y a pas d'arc primitif. La partie est alors nulle. Dans le second exemple, Lucie (en rouge) gagne car elle a réussi à construire un arc de taille maximale. Dans le troisième exemple, l'adversaire (en bleu) gagne parce qu'il a formé un arc (non primitif) bleu de taille maximale.

Dans tout le problème, on appelle *stratégie* une manière déterministe de décrire de jouer en fonction des coups qui ont été joués précédemment. Autrement dit, une stratégie est un algorithme qui indique quel coup jouer en fonction de la situation courante, de sorte que, dans deux situations identiques, il indiquera toujours le même coup à jouer.

Comme Lucie n'aime pas perdre, elle commence par se choisir pour adversaire l'Idiot du Village. Ce dernier portant bien son nom, il joue ses coups **aléatoirement**, sans réfléchir. Chaque coup joué suit alors une *loi uniforme* sur le cercle. Lucie cherche alors des stratégies qui *maximisent* sa probabilité de gagner contre cet adversaire.

Lucie et son adversaire conviennent de commencer par fixer $2n = 4$.

1. Montrer que si Lucie laisse son adversaire jouer en premier, elle peut gagner à tous les coups.

2. Après qu'elle ait gagné une partie, son adversaire la laisse jouer en premier.

a) Lucie dispose-t-elle d'une stratégie lui garantissant de gagner ?

b) Lucie dispose-t-elle d'une stratégie lui garantissant de ne jamais perdre ?

c) Démontrer que Lucie dispose d'une stratégie lui garantissant une probabilité de gagner de $3/4$.

d) Peut-elle faire mieux ?

e) Démontrer que, pour tout $p \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$, il existe une stratégie garantissant à Lucie de gagner avec une probabilité de p.

f) Déterminer l'ensemble des $p \in [0,1]$ tels qu'il existe une stratégie permettant à Lucie de gagner avec une probabilité de p. Cet ensemble est-il égal à $[0,1]$?

g) Même question pour pour les probabilités de ne pas perdre.

3. Lucie et son adversaire choisissent désormais $2n > 4$.

a) Étudier l'ensemble des $p \in [0,1]$ tels qu'il existe une stratégie permettant à Lucie de gagner avec une probabilité de p.

b) Et pour les probabilités de ne pas perdre ?

Lucie propose un pacte à son adversaire. Ils conviennent d'un entier $p \geqslant n$, et les règles sont changées de sorte que l'adversaire de Lucie place p points plutôt que n. Comme la règle du tour-par-tour est alors difficile à appliquer, ils conviennent que l'adversaire de Lucie placera tous ses points en premier. Ce dernier joue toujours aléatoirement sur le cercle, mais *avant* Lucie, de sorte que cette dernière a alors toute la liberté de choisir où placer ses points. Lucie a donc plus d'information que son adversaire, mais en contrepartie, ce dernier peut placer plus de points qu'elle.

4.

a) Montrer que s'il existe une stratégie permettant à Lucie de gagner à coup sûr, alors $n \geqslant 1 + \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor$.

b) Lucie dispose-t-elle d'une stratégie optimale ? Discuter selon la valeur de n et p.

Pour essayer, Lucie et son adversaire reprennent exactement la même configuration que la précédente, mais en échangeant les rôles. Lucie place p points, son adversaire en place n. Ce dernier joue toujours aléatoirement, et Lucie place tous ses points en premier. De plus, cette fois-ci, on n'impose plus $p \geqslant n$.

5.

a) Quelle configuration naturelle Lucie est-elle alors fortement tentée de jouer ? Quelle est alors sa probabilité de gagner ?

b) Cette stratégie est-elle optimale ? Si oui, le démontrer.

Fatiguée de jouer avec l'Idiot du Village, Lucie se trouve un adversaire à sa taille : Lucien. L'un des deux joueurs est désigné pour jouer en premier, et $2n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

6. Démontrer qu'aucun des deux joueurs ne dispose alors de stratégie gagnante.

Lucie et Lucien parviennent à convaincre $k \geqslant 1$ joueurs supplémentaires de jouer avec eux. Ils ont chacun une couleur et jouent chacun leur tour, toujours suivant les mêmes règles ; le nombre total $(k+2)n \in \mathbb{N}^*$ de points joués au cours de la partie étant fixé.

7. L'un des joueurs a-t-il une stratégie gagnante ?

8. Lucie se demande : que dire des questions précédentes si elle avait convenu dès le départ que le gagnant était non pas celui ayant l'arc le plus long, mais celui étant parveni à maximiser la somme des longueurs des arcs de sa couleur ?

9. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

9. Titre

Énoncé

1. Première question

2. Deuxième question

3. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *