

# TFJM<sup>2</sup> 2022: FICHES DU JURY

VERSION 1.0 MISE À JOUR LE 8 DÉCEMBRE 2024

**Avertissement :** Le contenu de ces fiches doit rester confidentiel jusqu'au tournoi national !  
Même si vous encadrez une équipe, vous ne devez pas diffuser son contenu aux élèves au risque de dénaturer le tournoi !

## TABLE DES MATIÈRES

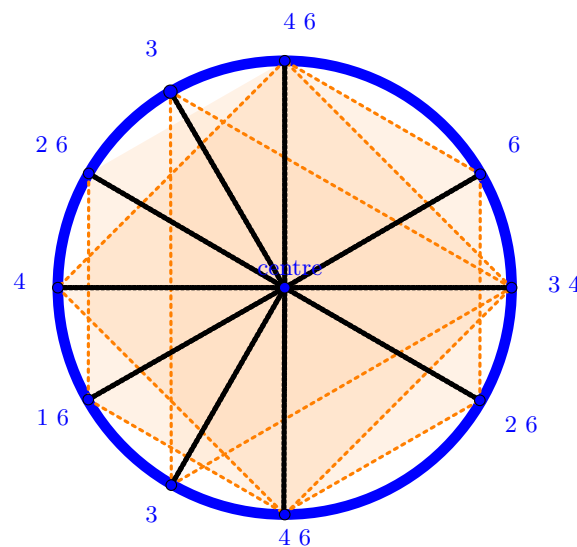
1. Plats à tarte gradués	2
Eléments de réponse	3
2. Titre	5
Eléments de réponse	5
3. Titre	6
Eléments de réponse	6
4. Le cauchemar de la ligne 91-06	7
Eléments de réponse	9
5. Titre	10
Eléments de réponse	10
6. Titre	11
Eléments de réponse	11
7. Titre	12
Eléments de réponse	12
8. Points colorés sur un cercle	13
Eléments de réponse	15
9. À vos dés, prêt, jouez !	18
Eléments de réponse	19

## 1. PLATS À TARTE GRADUÉS

Lors d'un tournoi de tartes, différentes familles veulent faire des découpages en parts égales. Chaque famille va fabriquer son propre moule à tarte sur lequel elle va indiquer des graduations qui correspondent aux endroits où il faut découper entre le centre et la graduation pour former des parts égales. C'est à dire que pour un nombre  $u \in \mathbb{N}^*$ , on va faire apparaître  $u$  fois un trait avec le numéro  $u$  indiqué sur le bord du moule à tarte formant un  $u$ -gone régulier inscrit dans le cercle.

Bien sûr, un même moule doit pouvoir avoir plusieurs graduations parce que le nombre  $u$  de parts de tarte qu'on voudra faire n'est pas toujours le même suivant le nombre de convives. On note alors  $N$  le nombre de numéros de graduations différentes qu'on veut faire apparaître et  $S = \{u_1, \dots, u_n\}$  l'ensemble des numéros qu'on veut faire apparaître. On peut identifier le moule à tarte à un cercle (car on ne veut faire que des tartes rondes) et les graduations à des points de ce cercle.

Par exemple, le plat à tarte de graduations  $S = \{1, 2, 3, 4, 6\}$  peut être gradué en



Il y a donc 10 graduations sur le plat à tarte avec au plus 2 au même endroit sur cet exemple.

**1.** Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels distincts. On prend  $N = 2$ ,  $u_1 = a$  et  $u_2 = b$  de sorte que  $S = \{a, b\}$ . Quel est le nombre minimal de graduations à mettre sur le moule à tarte afin d'être capable de couper la tarte à la fois en  $a$  parts égales ou en  $b$  parts égales ?

**2.** On veut maintenant  $N = 3$  graduations, c'est-à-dire que  $S = \{a, b, c\}$  avec  $a, b, c \in \mathbb{N}^*$  deux à deux distincts. Quel est le nombre minimal de graduation à mettre sur le plat à tarte afin d'être capable de couper la tarte à la fois en  $a$  parts égales,  $b$  parts égales ou  $c$  parts égales ?

Désormais, il y a différentes familles qui s'affrontent dans un tournoi de graduations de moules à tarte. Chacun famille doit choisir  $N$  valeurs distinctes à graduer  $S = \{u_1, \dots, u_N\}$ .

- La famille **Première** choisit de graduer les  $N$  premiers nombres premiers, soit  $S_N^p = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ .
- La famille **Géométrique** choisit un entier  $a \geq 2$  et de graduer les puissances de  $a$ , soit  $S_N^g = \{1, a, a^2, \dots, a^{N-1}\}$ .
- La famille **Complète** choisit de graduer les  $N$  premiers nombres entiers naturels, soit  $S_N^c = \{1, 2, \dots, N\}$ .

- La famille **Divisée** choisit le plus petit entier  $\alpha_N$  qui admet exactement  $N$  diviseurs  $\delta_{1,\alpha_N}, \dots, \delta_{N,\alpha_N}$  et choisit de graduer les  $N$  diviseurs de  $\alpha_N$ , soit  $S_N^d = \{\delta_{1,\alpha_N}, \dots, \delta_{N,\alpha_N}\}$ .

Par exemple, si  $N = 6$ , on a :

- $S_6^p = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ .
- $S_6^g = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$  pour  $a = 2$ .
- $S_6^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- $S_6^d = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$  car  $\alpha_6 = 12$ .

**3.** Les familles choisissent qu'il existe un point d'origine du cercle sur laquelle toutes les graduations apparaissent, combien y aura-t-il alors  $G_N^p$  (resp.  $G_N^g, G_N^c, G_N^d$ ) de graduations, pour la famille Première (resp. Géométrique, Complète, Divisée), sur le plat à tartes. Donner un encadrement le plus précis possible pour  $G^p$  (resp.  $G^g, G^c, G^d$ ).

Les épaisseurs des traits de graduation posent des problèmes de lecture. Les familles veulent donc mettre le moins possible de graduations sur le plat à tartes. Elles se demandent si toutes les faire démarrer à la même origine est vraiment le plus efficace.

**4.** Peut-on trouver un exemple d'une famille  $S_N^u = \{u_1, \dots, u_N\}$  pour lequel il est possible de faire mieux quand les graduations ne démarrent pas toutes au même endroit si  $N = 3$  ? si  $N = 4$  ? pour un  $N$  assez grand ?

Dans ce cas, estimer aussi précisément que possible le nombre  $\hat{G}_N^u$  de graduations qu'on peut mettre en fonction de  $N$  et de  $S = \{u_1, \dots, u_N\}$ .

**5.** Lorsque ce minimum est atteint, pour chacune des quatre familles précédemment décrite, combien doit-on mettre de graduations au même endroit au minimum ?

**6.** Existe-t-il un entier  $N$  tel que pour  $n > N$ , l'ordre entre les  $\hat{G}^p$  (resp.  $\hat{G}^g, \hat{G}^c, \hat{G}^d$ ) fini par être toujours le même. Si oui, quel est cet ordre ?

**7.** Existe-t-il une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , on a  $S_N^u \leq \min(S_N^p, S_N^g, S_N^c, S_N^d)$  ?

**8.** Proposer et explorer d'autres pistes de recherche.

## ELÉMENTS DE RÉPONSE

**1.** (Facile)  $a + b - \text{pgcd}(a, b)$ .

**2.** (Moyen) Comprendre qu'il y a un sommet commun et traiter la question suivante. Deux réponses équivalentes possibles :

$$\sum_{d|a \text{ ou } d|b \text{ ou } d|c} \varphi(d)$$

ou utiliser la formule du crible pour obtenir

$$a + b + c - \text{pgcd}(a, b) - \text{pgcd}(a, c) - \text{pgcd}(b, c) + \text{pgcd}(a, b, c).$$

Ce qui est difficile, c'est de voir qu'on ne peut pas atteindre

$$a + b + c - \text{pgcd}(a, b) - \text{pgcd}(a, c) - \text{pgcd}(b, c)$$

**3.** (Facile)  $G^p = 1 + \sum_{i=1}^N (p_i - 1)$

(Trivial)  $G^g = a^{N-1}$

(Moyen)  $G^c = \sum_{i=1}^N \varphi(i)$  où  $\varphi$  est l'indicatrice d'Euler

(Trivial)  $G^d = \alpha_N$

**4.** (Facile) Le cas  $N = 3$  est la question 2.

(Difficile) On ne peut pas faire mieux pour  $N = 4$ . C'est facile si le graphe des intersections deux à deux n'est pas un cycle. Sinon, il faut distinguer les cas et utiliser le fait qu'un nombre premier est toujours  $\geq 2$  pour conclure.

(Ouvert) pour  $N \geq 5$ , on pense qu'on ne peut pas faire mieux.

5. (Moyen) 2 (faire des intersections consécutives); (Facile) 2 car  $\sum_{k=0}^{N-2} a^k < a^{N-1}$ ; (Ouvert)  $\Theta(\log_2(N))$ ? (Difficile/Ouvert) 1+ nombre de facteurs premiers de  $\alpha_N$ ?

6. (Difficile) Remarque :  $\alpha_N$  est la suite donnée par <https://oeis.org/A005179> Elle n'est pas facile à calculer à cause des entiers « extraordinaires » mais on peut quand même la minorer asymptotiquement par  $(\log_2 N)^{\log_2 N}$ .

Réponse :  $G_N^p = G_N^p \sim \Theta(N^2 \ln(n)^3)$ ,  $G_N^g = a^{N-1}$ ,  $G_N^c \sim \frac{N^2}{2\zeta(2)}$  et  $G_N^d \sim \Theta((\log_2 N)^{\log_2 N})$  donc

$$\hat{G}_N^c < G_N^c \ll G_N^p \ll G_N^d \ll G_N^g.$$

7. (Difficile/Ouvert) Oui, on choisit une permutation  $\sigma \in \text{Bij}(\mathbb{N})$  telle que la suite  $n \mapsto \varphi(\sigma(n))$  est croissante. La suite  $u_n = \sigma(n)$  convient alors. En fait, c'est la seule qui réalise le minimum asymptotique, au choix de  $\sigma$  près. Je ne sais pas le démontrer (utilise l'hypothèse de Riemann?)

\* \* \*

## 2. TITRE

## Énoncé

1. Première question
2. Deuxième question
3. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

## ELÉMENTS DE RÉPONSE

1. (Facile) Première réponse
2. (Moyen) Deuxieme réponse

\* \* \*

## 3. TITRE

Énoncé

1. Première question
2. Deuxième question
3. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

## ELÉMENTS DE RÉPONSE

1. (Facile) Première réponse
2. (Moyen) Deuxieme réponse

\* \* \*

## 4. LE CAUCHEMAR DE LA LIGNE 91-06

Dans une contrée lointaine, les conditions de trafic se sont considérablement dégradées sur la ligne de bus 91-06, qui relie une importante gare ferroviaire à la cité universitaire, au grand dam des étudiants. On assiste notamment à des scènes spectaculaires où un bus est tellement bondé qu'il ralentit d'arrêt en arrêt, pour finir par se faire rattraper par celui qui le suit, avec parfois trois bus consécutifs se suivant à la queue leu leu. Face à ce problème, la société des transports TRAP a mandaté Antoine pour effectuer une analyse d'efficacité et proposer des pistes d'amélioration. La situation étant plutôt complexe (c'est le moins qu'on puisse dire!), Antoine décide de travailler sur un modèle simplifié. Il considère la ligne 91-06 comme une ligne droite, avec le dépôt situé en 0, puis un arrêt en chaque entier  $n \geq 1$  (le dépôt n'est donc pas considéré comme un arrêt). Après quelques observations, il lui apparaît que les bus se déplacent à une vitesse moyenne maximale  $V_0$ , mais que leur vitesse moyenne diminue à mesure qu'ils chargent des passagers. Antoine conjecture que la vitesse moyenne d'un bus contenant  $k$  passagers (le chauffeur ne compte pas comme un passager) est donnée par

$$(1) \quad V_k = \frac{V_0}{1 + \ln(k+1)}.$$

(Antoine considère que les bus se déplacent constamment à leur vitesse moyenne, et le temps passé aux arrêts est compris dans cette vitesse moyenne. Autrement dit, il fait comme si les bus se déplaçaient constamment à vitesse  $V_k$ , et lorsqu'ils atteignent un arrêt, ils embarquent tous les passagers qui s'y trouvent et changent de vitesse instantanément.) Les bus ne peuvent pas se dépasser : lorsqu'un bus rattrape son prédécesseur, il le suit à la même vitesse que lui (y compris si cela implique de rouler à une vitesse inférieure à sa vitesse moyenne), et en arrivant à un arrêt, les passagers sont répartis équitablement entre les bus (s'il devait y avoir plus de bus que de passagers, en supposant qu'il y a  $N$  passagers, chacun des  $N$  bus les moins remplis recevrait un passager).

**1.** Dans un premier temps, Antoine s'intéresse à ce qui se produit aux heures de pointe. Il considère qu'il y a  $N$  passagers à chaque arrêt, et que ceux-ci ne se remplissent pas par la suite (ce qui correspond à dire qu'il y a tant de passagers aux arrêts que le remplissage sur la période étudiée est négligeable).

- a) Deux bus quittent le dépôt, le premier au temps  $t = 0$ , le second au temps  $t = 1$ . Finissent-ils par se rattraper ?
- b) Antoine se demande si cette réponse dépend de sa modélisation de la vitesse. Reprendre le point 1 si  $V_k$  peut être donnée par une expression quelconque, et non nécessairement celle en (1). (On supposera juste que  $V_k$  est décroissante en  $k$ , car il est raisonnable de penser que les bus ralentissent s'ils sont davantage chargés.)

**2.** Antoine se demande à présent ce qui se passe lorsque la journée commence, et que les arrêts se remplissent progressivement. Il considère donc toujours deux bus, un démarrant au temps  $t = 0$ , et un démarrant au temps  $t = 1$ . Au temps  $t = 0$ , les arrêts sont tous vides, et se remplissent à un taux constant de  $\rho$  passagers par unité de temps. Lorsqu'un bus arrive à un arrêt, il récupère tous les passagers qui y sont arrivés depuis le passage du bus précédent, soit  $\rho$  multiplié par le temps écoulé (on permet un nombre non entier de passagers, pour simplifier la modélisation). Reprendre la question précédente dans ce cadre, et considérer également le cas où on fait démarrer  $m$  bus, le premier au temps  $t = 0$ , et ensuite un par unité de temps.

**3.** Antoine étant bien conscient que la modélisation qui précède ne tient pas compte des petits aléas de la circulation ou des afflux imprévus de passagers, il souhaite désormais les inclure. Il considère donc les variantes suivantes.

- a) Au temps  $t = T$ , le bus de tête est immobilisé pendant un intervalle de temps de  $\frac{1}{10}$  en raison d'un embouteillage, avant de reprendre à vitesse normale.

- b) Au temps  $t = T$ , une quantité  $q$  de passagers arrive à l'arrêt situé en  $n = 10$  en plus du remplissage normal (par exemple, suite à l'arrivée d'un TGV, dont les passagers souhaitent rallier la cité universitaire en bus. . .).

Toujours dans le cas de deux bus séparés d'une unité de temps, évaluer l'impact des deux perturbations ci-dessus sur la suite de leur parcours. (On discutera les résultats en fonction de  $T$  et  $q$ .)

4. Antoine souhaite à présent concevoir une stratégie pour retenir les bus aux heures de pointe, afin d'éviter qu'ils ne se rattrapent. On suppose donc à présent que, lorsqu'ils arrivent aux arrêts (et uniquement à ce moment), les bus peuvent s'arrêter et attendre un temps arbitraire avant de repartir à leur vitesse normale. Une *stratégie* est une façon pour les bus de décider, en connaissance de la position de tous les bus et du nombre de passagers qu'ils transportent, du temps à attendre lorsqu'ils arrivent à un arrêt. Dans le cadre de la question 1a), existe-t-il une stratégie pour retenir les bus de façon à ce que le second ne rattrape jamais le premier ? Le cas échéant, une telle stratégie peut-elle être choisie de façon à améliorer le temps de parcours voyageur (c'est-à-dire que certains passagers iraient de l'arrêt où ils sont montés à un arrêt ultérieur plus vite que si cette stratégie n'était pas mise en œuvre) ?

5. Antoine souhaite ajouter encore davantage de réalisme à son modèle, et tenir compte du fait que les bus font plusieurs rotations sur le même trajet. Il considère donc que la ligne se termine à l'arrêt  $n = 20$ , considéré comme le dépôt de fin de ligne. Il n'y a aucun passager à cet arrêt, lorsqu'un bus l'atteint, il se vide de tous ses passagers, et repart dans l'autre sens. Il effectue ensuite des allers et retours sur le trajet, et à chaque fois qu'il atteint le dépôt en  $n = 0$  ou en  $n = 20$ , il dépose tous ses passagers et repart dans l'autre sens. Il considère également qu'au temps  $t = 0$ , il y a  $N$  passagers à chaque arrêt et dans chaque sens, et qu'ensuite, les arrêts continuent à se remplir à un taux de  $\rho$  passagers par unité de temps.

On suppose que deux bus circulent sur la ligne, partant tous deux du dépôt en  $n = 0$ , le premier au temps  $t = 0$ , le second au temps  $t = 1$ . Existe-il une stratégie pour retenir les bus aux arrêts de façon à éviter qu'ils ne se rattrapent ? Que se passe-t-il dans le cas de  $m$  bus ? Discuter de l'optimalité d'une éventuelle stratégie par rapport au temps de parcours voyageur.

6. Antoine cherche à explorer une dernière idée pour améliorer le temps de parcours voyageur. On se place à nouveau dans le cadre de la question 2, avec deux bus circulant, et où les arrêts sont initialement vides et se remplissent progressivement. Antoine propose que le premier bus desserve uniquement les arrêts impairs, et le second uniquement les arrêts pairs.

- a) Cette stratégie présente-t-elle un gain en termes de temps de parcours voyageur ? Le quantifier aussi précisément que possible.
- b) Pour pousser son idée encore plus loin son idée, Antoine suppose à présent qu'un bus démarre à chaque temps  $t$  entier, et que les bus parcourent les arrêts de  $k$  en  $k$ . Plus précisément, le premier bus dessert les arrêts multiples de  $k$ , le suivant les arrêts multiples de  $k$  plus 1, et ainsi de suite. Après  $k$  bus, le schéma se répète : le  $(k + 1)$ -ème bus dessert les arrêts multiples de  $k$ , le  $(k + 2)$ -ème bus dessert les arrêts multiples de  $k$  plus 1, et ainsi de suite. Quantifier le gain éventuel en termes de temps de parcours voyageur, et examiner ce qui se produit lorsque  $k \rightarrow +\infty$ .
- c) Antoine décide de pousser son idée encore plus loin, et d'ajouter des arrêts, pour répartir les voyageurs sur davantage d'arrêts. Il suppose donc qu'il y a à présent un arrêt en  $\frac{n}{k}$  pour chaque entier  $n \geq 1$ , et que les voyageurs arrivent aux arrêts à un taux de  $\frac{\rho}{k}$  passagers par unité de temps. On considère toujours qu'un bus quitte le dépôt à chaque unité de temps. Quantifier l'impact de ce changement sur le temps de parcours voyageur, à la fois dans le cas où chaque bus dessert tous les arrêts ou dans le cas où les bus desservent les arrêts de  $k$  en  $k$ . On s'intéressera particulièrement à ce qui se produit à la limite lorsque  $k \rightarrow +\infty$ .

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.



## ÉLÉMENTS DE RÉPONSE

Temporaire, à vérifier et approfondir. (Inclus uniquement à titre de discussion à ce stade.)

1. (Facile) Les bus se rattrapent toujours, quelle que soit la formule (sauf si la vitesse est constante).
2. (Relativement facile) Les bus ne se rattrapent jamais, par un argument de symétrie temporelle. Enfin, ça c'est si chaque bus démarre quand le précédent atteint le premier arrêt. À voir si on veut imposer ça.
3. (Relativement facile) La perturbation fait toujours se rattraper les bus, si le premier en est affecté.
4. (Moyen, peut-être difficile à faire entièrement et proprement) Une telle stratégie existe, cela peut se faire de façon brutale. Il semble clair qu'on ne peut pas avoir de gain de temps de parcours voyageur, mais il faut le prouver proprement.
5. (Difficile) Pour deux bus, la stratégie existe. Quand on commence à avoir beaucoup de bus, c'est moins clair à prouver. De nouveau, il semble raisonnable qu'on n'a pas de gain de temps de parcours, mais il faut le prouver proprement.
6. (Moyen à difficile) On s'attend à un gain à la marge, mais il faut tenir compte du temps d'attente. À la limite, dans le cas des arrêts qui se multiplient, on s'attend à trouver une EDO.

\* \* \*

## 5. TITRE

Énoncé

1. Première question
2. Deuxième question
3. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

## ELÉMENTS DE RÉPONSE

1. (Facile) Première réponse
2. (Moyen) Deuxieme réponse

\* \* \*

## 6. TITRE

## Énoncé

1. Première question
2. Deuxième question
3. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

## ELÉMENTS DE RÉPONSE

1. (Facile) Première réponse
2. (Moyen) Deuxième réponse

\* \* \*

## 7. TITRE

## Énoncé

1. Première question
2. Deuxième question
3. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

## ELÉMENTS DE RÉPONSE

1. (Facile) Première réponse
2. (Moyen) Deuxieme réponse

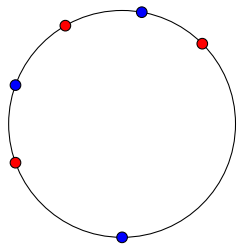
\* \* \*

## 8. POINTS COLORÉS SUR UN CERCLE

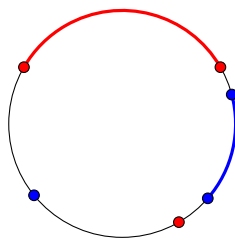
Lucie a inventé un jeu. Les règles sont les suivantes.

Le jeu se déroule sur un cercle. Au départ, les points du cercle sont *non colorés*. L'un des deux adversaires est désigné pour jouer en premier. Chacun leur tour, Lucie et son adversaire jouent (c'est à dire, choisissent) un point, qui sera alors coloré en leur couleur respective : Rouge pour Lucie, Bleu pour son adversaire. Lorsqu'ils jouent, il leur est interdit de choisir un point qui a déjà été coloré par l'un d'eux. Lucie convient à l'avance du nombre de coups que la partie durera. Tous deux jouent le même nombre de coups, de sorte que le *nombre de coups* est un entier pair, noté  $2n$ . Par exemple, si le *nombre de coups* vaut  $2n = 6$  coups, ils joueront  $n = 3$  coups chacun. La partie s'arrête donc lorsque les  $2n$  coups sont joués.

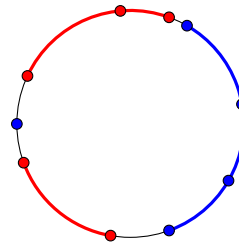
À la fin de la partie, le cercle est découpé en arcs de cercle dont les extrémités sont soit rouge, soit bleu. Dans une telle configuration, un *arc primitif* est un arc dont les deux extrémités sont colorées (en rouge ou en bleu) et dont tous les autres points ne sont pas colorés (par exemple, le cercle tout entier, vu comme un arc de cercle, n'est jamais primitif). Les arcs primitifs dont les deux extrémités sont rouges sont alors colorés en rouge, et ceux dont les extrémités sont toutes deux bleues sont colorés en bleu. Le gagnant est alors celui étant parvenu à former l'arc de cercle **non nécessairement primitif** le plus long entièrement coloré de sa propre couleur. S'il y a égalité de tels arcs, ou s'il n'en existe aucun, la partie est déclarée nulle.



Exemple 1



Exemple 2



Exemple 3

Les configurations ci-dessus représentent deux fins de partie pour  $2n = 6$  et une pour  $2n = 10$ . Dans le premier exemple, il n'y a pas d'arcs colorés, parce qu'il n'y a pas d'arc primitif. La partie est alors nulle. Dans le second exemple, Lucie (en rouge) gagne car elle a réussi à construire un arc de taille maximale. Dans le troisième exemple, l'adversaire (en bleu) gagne parce qu'il a formé un arc (non primitif) bleu de taille maximale.

Dans tout le problème, on appelle *stratégie* une manière déterministe de décrire de jouer en fonction des coups qui ont été joués précédemment. Autrement dit, une stratégie est un algorithme qui indique quel coup jouer en fonction de la situation courante, de sorte que, dans deux situations identiques, il indiquera toujours le même coup à jouer.

Comme Lucie n'aime pas perdre, elle commence par se choisir pour adversaire l'Idiot du Village. Ce dernier portant bien son nom, il joue ses coups **aléatoirement**, sans réfléchir. Chaque coup joué suit alors une *loi uniforme* sur le cercle. Lucie cherche alors des stratégies qui *maximisent* sa probabilité de gagner contre cet adversaire.

Lucie et son adversaire conviennent de commencer par fixer  $2n = 4$ .

1. Montrer que si Lucie laisse son adversaire jouer en premier, elle peut gagner à tous les coups.
2. Après qu'elle ait gagné une partie, son adversaire la laisse jouer en premier.
  - a) Lucie dispose-t-elle d'une stratégie lui garantissant de gagner ?
  - b) Lucie dispose-t-elle d'une stratégie lui garantissant de ne jamais perdre ?
  - c) Démontrer que Lucie dispose d'une stratégie lui garantissant une probabilité de gagner de  $3/4$ .

- d) Peut-elle faire mieux ?
- e) Démontrer que, pour tout  $p \in ]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$ , il existe une stratégie garantissant à Lucie de gagner avec une probabilité de  $p$ .
- f) Déterminer l'ensemble des  $p \in [0, 1]$  tels qu'il existe une stratégie permettant à Lucie de gagner avec une probabilité de  $p$ . Cet ensemble est-il égal à  $[0, 1]$  ?
- g) Même question pour les probabilités de ne pas perdre.

3. Lucie et son adversaire choisissent désormais  $2n > 4$ .

- a) Étudier l'ensemble des  $p \in [0, 1]$  tels qu'il existe une stratégie permettant à Lucie de gagner avec une probabilité de  $p$ .
- b) Et pour les probabilités de ne pas perdre ?

Lucie propose un pacte à son adversaire. Ils conviennent d'un entier  $p \geq n$ , et les règles sont changées de sorte que l'adversaire de Lucie place  $p$  points plutôt que  $n$ . Comme la règle du tour-par-tour est alors difficile à appliquer, ils conviennent que l'adversaire de Lucie placera tous ses points en premier. Ce dernier joue toujours aléatoirement sur le cercle, mais *avant* Lucie, de sorte que cette dernière a alors toute la liberté de choisir où placer ses points. Lucie a donc plus d'information que son adversaire, mais en contrepartie, ce dernier peut placer plus de points qu'elle.

4.

- a) Montrer que s'il existe une stratégie permettant à Lucie de gagner à coup sûr, alors  $n \geq 1 + \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor$ .
- b) Lucie dispose-t-elle d'une stratégie optimale ? Discuter selon la valeur de  $n$  et  $p$ .

Pour essayer, Lucie et son adversaire reprennent exactement la même configuration que la précédente, mais en échangeant les rôles. Lucie place  $p$  points, son adversaire en place  $n$ . Ce dernier joue toujours aléatoirement, et Lucie place tous ses points en premier. De plus, cette fois-ci, on n'impose plus  $p \geq n$ .

5.

- a) Quelle configuration naturelle Lucie est-elle alors fortement tentée de jouer ? Quelle est alors sa probabilité de gagner ?
- b) Cette stratégie est-elle optimale ? Si oui, le démontrer.

Fatiguée de jouer avec l'Idiot du Village, Lucie se trouve un adversaire à sa taille : Lucien. L'un des deux joueurs est désigné pour jouer en premier, et  $2n \in \mathbb{N}^*$  est fixé.

6. Démontrer qu'aucun des deux joueurs ne dispose alors de stratégie gagnante.

Lucie et Lucien parviennent à convaincre  $k \geq 1$  joueurs supplémentaires de jouer avec eux. Ils ont chacun une couleur et jouent chacun leur tour, toujours suivant les mêmes règles ; le nombre total  $(k+2)n \in \mathbb{N}^*$  de points joués au cours de la partie étant fixé.

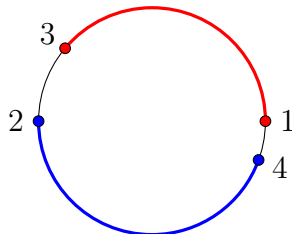
7. L'un des joueurs a-t-il une stratégie gagnante ?

8. Lucie se demande : que dire des questions précédentes si elle avait convenu dès le départ que le gagnant était non pas celui ayant l'arc le plus long, mais celui étant parvenu à maximiser la somme des longueurs des arcs de sa couleur ?

9. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

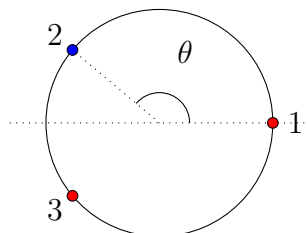
## ÉLÉMENTS DE RÉPONSE

1. (Facile) Puisque son adversaire joue en premier, elle peut jouer pile en face de lui (sur le point diamétralement opposé au premier coup de son adversaire). Son adversaire n'a pas le droit de jouer un point déjà coloré, il joue, et il suffit alors à Lucie de faire un arc d'angle strictement plus grand que celui formé par son adversaire à son deuxième coup. Il est clair qu'elle le peut toujours.



2.

- a) (Facile) Non. Lors de son deuxième coup, Lucie forme nécessairement un unique arc primitif. Il reste alors un coup à jouer à son adversaire, et, quelle qu'ait été la stratégie de Lucie pour placer ses deux points, elle ne pourra jamais s'assurer que son adversaire ne « coupe » pas son unique arc, menant à un match nul. m
- b) (Moyen) Oui, la réponse à la question suivante en fournit une.
- c) (Moyen+) On note  $D$  la droite formée par le premier point placé par Alice et le centre du cercle. Après que l'adversaire ait joué son point 1, Alice joue le symétrique de 1s par rapport à  $D$ .



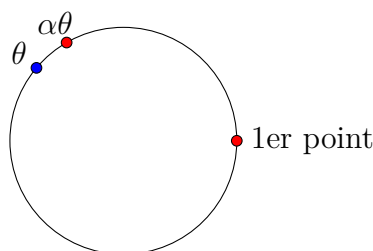
On définit alors  $\theta$  comme l'angle *aigu* l'angle formé entre le premier point placé (par Lucie) et le second (par l'adversaire). Clairement,  $\theta$  suit une loi uniforme sur  $[0, \pi]$ .

Alors, dans une telle configuration où l'angle vaut  $\theta$ , on voit que Lucie gagne si et seulement si son adversaire ne joue pas de sorte à couper l'arc qu'elle a formé, et qu'il y a match nul sinon.

Ceci arrive avec une probabilité  $\frac{2\pi-\theta}{2\pi}$ , parce que le numérateur de cette fraction est l'angle dans lequel l'ordinateur doit jouer pour que Lucie gagne.

Comme  $\theta$  est d'espérance  $\frac{\pi}{2}$ , l'espérance vaut  $1 - \frac{\pi/2}{2\pi}$ , c'est à dire  $3/4$ .

- d) (Ouvert) Peut-être, mais pas sûr. Je ne sais pas.
- e) (Moyen/Difficile) Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . Si  $\theta$  désigne toujours l'angle aigu formé entre le premier point placé (par Lucie) et le second (par l'adversaire), Lucie joue le point situé à l'angle  $\alpha\theta$  dans le même repère.



En se plaçant toujours dans le même repère, l'évènement « ne pas perdre » revient clairement à « l'adversaire joue un point dont l'angle (dans le même repère) est dans  $[0, \theta + \alpha\theta]$  ».

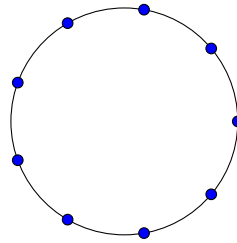
La probabilité associée est  $\frac{\theta + \alpha\theta}{2\pi}$ , l'espérance vaut  $(1 + \alpha)/4$ , qui décrit  $] \frac{1}{4}, \frac{1}{2} [$  quand  $\alpha$  décrit  $]0, 1[$ .

f) et g) (Difficile/Ouvert) Il y a pas mal de choses à dire et à faire, en considérant par exemple des stratégies dépendant d'un paramètre qu'on fait varier, ce qui permet de trouver certains intervalles inclus dans les ensembles recherchés.

Pour les inclusions réciproques, notamment pour le premier, trouver sa borne supérieure (ce qui était l'objet de d)) a l'air assez difficile.

3. (Difficile/Ouvert) Pareil, on peut trouver des intervalles inclus dans les ensembles recherchés en considérant certaines stratégies dépendant d'un paramètre qu'on fait varier, les inclusions réciproques étant sans nul doute plus difficiles.

4. (Moyen) Ceci découle de l'observation suivante : L'adversaire peut toujours jouer quelque chose de très proche, à  $\varepsilon$  près, du (redouté) polygône régulier à  $p$  côtés.



Le fait qu'on considère les  $\varepsilon$ -approximations de ce polygône régulier fait qu'on considère un évènement de probabilité non-nulle.

Dans ce cas, il est clair que pour  $\varepsilon$  assez petit, Alice va être obligée de :

- Trouver l'arc primitif adverse le plus grand (qui est unique avec probabilité 1),
- Le couper, de sorte à l'annuler, et ce en plaçant deux points dans cet arc de sorte que l'arc formé soit alors plus grand que tous les autres arcs adverses (restants),
- couper un arc adverse sur deux, pour rendre tous les arcs adverses primitifs.

De cette manière, par construction, elle s'assure la victoire. On se convainc facilement qu'elle n'a pas d'autre solution :

- Tant qu'elle laisse l'arc primitif adverse maximal non coupé, elle ne peut pas gagner puisqu'elle ne peut pas former d'arc plus grand ailleurs (par maximalité du précédent) ; d'où la nécessité du premier point
- Tant qu'elle ne forme pas d'arc dépassant la taille de tous les autres arcs primitifs, elle ne peut pas gagner. Or, toujours par maximalité, elle ne peut pas faire de tel arc ailleurs qu'au sein de l'arc primitif adverse maximal ; d'où la nécessité du second point
- Dès que *varepsilon* est petit (i.e. très que la figure adverse est  $\varepsilon$ -proche du polygône régulier pour  $\varepsilon$  petit), il va être nécessaire de couper un arc sur deux, sinon deux arcs consécutifs (parce que  $\varepsilon$  est petit) formeront un arc non primitif dépassant l'arc du point précédent ; d'où la nécessité du troisième point.

Pour faire tout cela, il faut un point pour un arc sur deux (arrondi au supérieur si  $p$  est impair) :  $\left\lceil \frac{p+1}{2} \right\rceil$ , plus 1 pour construire l'arc du second point précédent, d'où le résultat.

5.

a) (Facile) Elle a évidemment envie de jouer le polygône régulier.



- b) (Moyen) On cherche l'évènement contraire « L'adversaire a bien coupé au moins une fois chaque arc ».

La probabilité de gagner est un dénombrement au cours duquel il est très facile de s'exciter trop vite et de se tromper ! Cette question saura distinguer les équipes sachant raisonner droit de celles trébuchant au moindre obstacle.

La réponse est 1 si  $p < n$  et ... sinon.

6. (Moyen/Difficile) J'ai la preuve, mais il est tard, je l'écris plus tard  
7. (Difficile/Ouvert) Peut-être seulement difficile sans être infaisable.  
8. (Ouvert)  
9. (Ouvert)

\* \* \*

## 9. À VOS DÉS, PRÊT, JOUEZ !

Soit  $p \geq 2$ ,  $f \geq 2$  et  $n \geq 1$ . Clémentine joue avec  $p$  dés à 6 faces dans un jeu en plusieurs tours, où l'objectif est de maximiser un gain  $G$ . Au premier tour ( $n = 1$ ) de sa partie, elle lance tous les dés et les regroupe ensuite par valeur (tous les dés montrant "1", tous les dés montrant "2", etc.). Elle sélectionne ensuite un groupe de dés, dont elle additionne les valeurs pour les ajouter à son gain, puis recommence avec les dés restants.

Voici un exemple de déroulement de la partie pour 6 dés :

- Premier tour : Clémentine lance les dés et obtient 1, 4, 4, 5, 2, et 2. Elle regroupe les résultats en  $\{1\}$ ,  $\{2, 2\}$ ,  $\{4, 4\}$  et  $\{5\}$ . Elle choisit d'utiliser le groupe  $\{4, 4\}$  et ajoute 8 à son gain, ce qui donne  $G_1 = 8$ .
- Deuxième tour : Il reste à Clémentine 4 dés. Elle les lance et obtient 2, 3, 5 et 1. Elle regroupe les résultats en  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$  et  $\{5\}$ . Elle choisit d'utiliser le groupe  $\{5\}$ , ce qui ajoute 5 à son gain, donc  $G_2 = 5$ .
- Troisième tour : Clémentine lance les 3 dés restants et obtient 2, 2, et 1. Elle décide d'utiliser le groupe  $\{2, 2\}$ , ce qui lui rapporte 4 de plus, soit  $G_3 = 4$ .
- Quatrième tour : Elle lance son dernier dé et obtient un 6. Elle ajoute cette valeur à son gain, soit  $G_4 = 6$ .

Le gain total de Clémentine à la fin de cette partie est donc  $G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 = 23$ .

Dans un premier temps, on suppose que Clémentine joue avec des pièces, c'est-à-dire le cas  $f = 2$  où "pile" correspond à 1 et "face" à 2. Clémentine suit alors une stratégie simple : à chaque tour, elle choisit toujours le groupe de pièces montrant "face". Si aucune "face" n'est obtenue, elle est contrainte de prendre le groupe de "pile".

1. Quel est l'encadrement du gain possible au premier tour ? à la fin du jeu ?
2. Quelle est la probabilité que la partie finisse en 1 seul tour ?
3. Combien de tours durent en moyenne une partie ?
4. Quel est le gain moyen à un tour fixé  $n$  en fonction du nombre de dé restant au début du tour pour cette stratégie ?

On suppose maintenant que Clémentine joue avec des dés à un nombre quelconque  $f$  de faces, les valeurs allant de 1 à  $f$ . Clémentine envisage différentes stratégies :

- a) À chaque tour, Clémentine ajoute à son gain le groupe de dés avec le cardinal le plus élevé.
- b) À chaque tour, Clémentine ajoute à son gain le groupe de dés avec le cardinal le plus faible.
- c) À chaque tour, Clémentine ajoute à son gain le groupe de dés avec la somme des valeurs la plus élevée.
- d) À chaque tour, Clémentine ajoute à son gain le groupe de dés avec la valeur maximale .

Si plusieurs groupes remplissent les critères de la stratégie choisie, Clémentine sélectionne celui qui maximise son gain immédiat ou utilise le moins de dés.

5. Les stratégies proposées sont-elles optimales ?
6. Existe-t-il des cas où une stratégie serait clairement meilleure qu'une autre ? Donner des exemples.

7. Peut-on proposer une nouvelle stratégie, ou un mélange des stratégies précédentes, qui serait plus efficace ? Si oui, dans quels cas ?

EN fait je suis finalement pas fan des faces différentes.... si on veut optimiser on met des 6 partout sauf sur une face... si on veut minimiser idem avec 1 et 2...

Enfin, pour aller plus loin, on considère le cas où les dés ont  $f$  faces personnalisées avec des valeurs quelconques  $f_1, f_2, \dots, f_f$ . On appelle dé trivial, un dé où toutes ses faces sont identiques. On suppose que les dés ne peuvent pas être triviaux ici.

????????????????????

Je préférerais ton idée de face interdite. On peut poser que nos  $f - 1$  faces sont ok d'obtenir mais la face  $f$  est interdite (arbitrairement la plus grande ou la plus petite, j'ai pas l'impression que ça change grand chose...)

Une nouvelle règle vient compliquer la partie : une face interdite  $1 \leq v \leq f$  est définie avant le début du jeu. Si cette face apparaît sur au moins un dé lors d'un lancer, la partie s'arrête immédiatement, et Clémentine perd tout gain non comptabilisé avant ce tour.

Voici un exemple de déroulement de la partie pour 6 dés à 6 faces, où la face interdite est 6 :

- Premier tour : Clémentine lance les dés et obtient 1, 4, 4, 5, 2, et 2. La face interdite 6 n'apparaît pas. Elle regroupe les résultats en  $\{1\}$ ,  $\{2, 2\}$ ,  $\{4, 4\}$  et  $\{5\}$ . Elle choisit d'utiliser le groupe  $\{4, 4\}$  et ajoute 8 à son gain, ce qui donne  $G_1 = 8$ .
- Deuxième tour : Il reste à Clémentine 4 dés. Elle les lance et obtient 2, 3, 5, et 6. La face interdite 6 est obtenue, donc la partie s'arrête immédiatement, et Clémentine perd les gains restants de ce tour.

Dans cet exemple, le gain final de Clémentine est  $G = G_1 = 8$ .

8. Quel est le gain possible au premier tour ?

On suppose maintenant que le dé n'est pas équilibré et que la face interdite à une probabilité  $prob_v$  d'apparaître. Les autres faces ont la même probabilités d'être obtenues.

9. Combien de tours la partie dure-t-elle en moyenne, en fonction de  $p$ ,  $f$ , et de la probabilité d'apparition de la face interdite  $prob_v$  ?

10. Comment adapter les stratégies précédentes, données à la question 3, à la présence d'une face interdite ?

11. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

#### ELÉMENTS DE RÉPONSE

À un tour fixé  $n$ , on note  $d_k^n$  le nombre de dés montrant la valeur  $k$ . A un tour fixé, si Clémentine choisit un groupe de valeur  $\kappa$ , alors son gain augmente de :

$$G_n = G_{n-1} + \kappa \times d_\kappa^n$$

Le nombre de dé à un tour  $n$  vaut  $d^n = \sum_{k \leq f} d_k^n$ . (c'est déterminé sachant les tours précédents)  $d_k^n \sim \mathcal{B}(1/f, d^n)$  au début du tour (i.e. sachant  $d^n$ ) (on peut aussi considérer que les variables  $(d_k^n)_{k \leq f}$  suivent une loi multinomiale de paramètre  $d^n$  et  $(1/f, 1/f, \dots, 1/f)$  (tjrs sachant  $d^n$ )

1. (Facile) Clémentine a  $p$  pièces. Soit elle obtient  $p$  "pile" et dans ces cas là, elle obtient  $G_1 = p$ . Soit elle obtient entre 1 et  $p$  "face" et dans ces cas là elle obtient  $G_1 = 2, 4, \dots, 2p$  Donc  $G_1 \in \{2, 4, \dots, 2p\} \cup \{p\}$

**2.** (Facile) c'est la proba que  $d_1^1 = p$  ou  $d_2^1 = p$  donc que toutes les pièces soient sur pile ou sur face.  $2 \times (1/2)^p$ .

**3.** (cas  $p = 1, 2$  facile ; cas  $p = 3$  difficile ; cas + très dur/ouvert ?) Déjà remarque, peu importe  $p$ , le jeu termine en max  $p$  tours. Pour  $p = 1$ , bah 1 du coup. Pour  $p = 2$  le jeu termine forcément en max 2 tours et la probabilité qu'il termine au tour 1 est de  $1/2$  (FF ou PP) et donc en 2 tours en  $1/2$ . Donc en moyenne 1.5 tours.

$p = 3$ , (PPP PPF PFP PFF FPP FPF FFP FFF) donc  $1/4$  de finir tour 1 Puis il reste 1 dé avec pb  $3/8$  et 2 dé avec proba  $3/8$ . S'il reste 1 dé, ça finit à coup sûre, s'il reste 2 dé on se rapporte au cas précédent et en moyenne 1.5 tours de plus donc ça finit en 1 coup en  $1/4$ , en 2 coup en  $3/8 \cdot (1 + 1/2)$  et 3 coup  $3/8 \cdot 1/2$ . J'ai l'impression qu'on pourrait itérer ? En mode soit on termine tout de suite, soit on termine pas direct et on se rapproche à un cas précédent x la proba du nbr de dé restant mais ça l'air technique ptdr

Pour  $p$  qqconque, on a  $P(n = 1) = 1/2^{p-1}$  et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(n = 2) &= \sum_{l \leq p-1} \mathbb{P}(\text{obtenir } l \text{ face ou } l \text{ pile} | d^2 = l) \mathbb{P}(d^2 = l) \\ &= \sum_{l=1}^{p-1} \frac{1}{2^{l-1}} \times \binom{p}{l} \frac{1}{2^p} \\ &= \frac{1}{2^{p-1}} \times \sum_{l=1}^{p-1} \binom{p}{l} \frac{1}{2^l} \\ &= \frac{1}{2^{p-1}} \times ((1 + 0.5)^p - 0.5^p - 0.5^0) \\ &= \frac{1}{2^{p-1}} \times \frac{3^p}{2^p} - \frac{1}{2^{2p-1}} - \frac{1}{2^{p-1}} \\ &= \frac{3^p - 1}{2^{2p-1}} - \frac{1}{2^{p-1}} \end{aligned}$$

....

**4.** (facile/moyen) Non, on peut imaginer des configurations de tours où elles ne le sont pas. a) si on a un groupe de 1 f, et le reste de la plus petite valeur 1 ; b) la situation inverse ; c) si on a un groupe de 1 f, et un groupe de  $f + 1$  1 ; d) Si on a 1 "1" et le reste de "2", mieux vaut relancer le seul "1". La manière de justifier peut être dur ?

**5.** (moyen) On avait précédemment noté  $d^n$  le nombre de dés au début du tour  $n$ , on suppose  $d^n$  connu. Si pas de "face", proba  $\frac{1}{2^{d^n}}$  pour le gain  $d^n$ . Sinon, proba  $\binom{d^n}{k} \frac{1}{2^{d^n}}$  d'avoir le gain  $2k$  Donc gain moyen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{d^n}} \times d^n + \sum_{k=1}^{d^n} \binom{d^n}{k} \frac{1}{2^{d^n}} \times 2k &= \frac{1}{2^{d^n}} \times \left( d^n + 2 \sum_{k=1}^{d^n} \binom{d^n-1}{k-1} (d^n-1) \right) \\ &= \frac{1}{d^n} (d^n + 2 \times d^n \times 2^{d^n-1}) \\ &= \frac{d^n}{2^{d^n}} (1 + 2^{d^n}) \\ &\quad * \quad * \quad * \end{aligned}$$