$\mathbb{TFJM}^2$

Problèmes du 13ème Tournoi Français
des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens

VERSION 1.3 MISE À JOUR LE 7 JANVIER 2025

Préambule

Ces problèmes sont difficiles et sont proposés par des chercheurs et étudiants en mathématiques. Ils n'admettent pas toujours, à la connaissance du jury, de solution complète mais sont accessibles à des lycéens, c'est-à-dire que les auteurs sont certains qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Le jury n'attend pas des candidats qu'ils résolvent entièrement un problème, mais qu'ils en comprennent les enjeux, résolvent des cas particuliers, repèrent les difficultés et proposent des pistes de recherche. Attention, les questions ne sont pas toujours classées par ordre croissant de difficulté. Enfin, il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes : chaque équipe peut en refuser un certain nombre sans pénalité. On se reportera au règlement pour plus de détails.

 En cas de questions concernant le tournoi ou les énoncés, consulter le site `www.tfjm.org` ou contacter les organisateurs à l'adresse `contact@tfjm.org`.

Table des matières

Mots-clés :
1. Graphe, système dynamique, probabilités 2. Combinatoire 3. Arithmétique, optimisation
4. Système dynamique, statistiques 5. Géométrie, optimisation 6. Analyse, optimisation
7. Graphe, optimisation 8. Jeu, probabilités

Notations

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$	ensemble contenant les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$	ensemble des nombres entiers naturels
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}_+$	ensemble des nombres réels strictement positifs ou nuls
ln	logarithme népérien
$\lvert\cdot\rvert$	valeur absolue

1. Une bonne humeur contagieuse

Au pays des Merveilles, les lutins sont de mauvaise humeur. Un seul lutin parviendra-t-il à tous leur redonner le sourire ?

Le pays des Merveilles, noté M, est constitué de $n \geq 3$ lutins, qui peuvent chacun être de bonne ou mauvaise humeur. Chaque paire de lutins est soit amie, soit inconnue. Chaque jour, chaque lutin de bonne humeur sourit simultanément à un certain nombre de ses amis (ce nombre sera précisé dans la suite). Un lutin de mauvaise humeur qui reçoit au moins un sourire devient de bonne humeur, et pourra se mettre à sourire à partir du jour suivant.

En partant d'un lutin ℓ donné, on dit qu'un nombre $j \in \mathbb{N}$ est **réalisable** s'il est possible que tous les lutins deviennent de bonne humeur à partir du j-ième jour si, initialement, le lutin ℓ est le seul à être de bonne humeur. Par ailleurs, on dit que le nombre ∞ est réalisable s'il est possible qu'une situation où tous les lutins sont de bonne humeur n'arrive jamais.

Par exemple, si on suppose que chaque lutin sourit à exactement 1 de ses amis (n'importe lequel), que le pays des Merveilles M est constitué de 3 lutins, où un lutin est ami avec les deux autres, et qu'on part du lutin ami aux deux autres, alors tous les nombres entiers supérieurs ou égaux à 2 sont réalisables. Voir Figure 1.

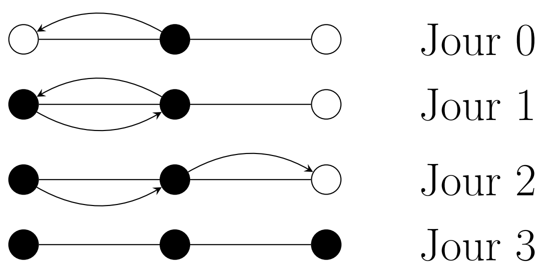

Figure 1. Un exemple de propagation, qui montre que le nombre 3 est réalisable. Les disques correspondent aux lutins, ils sont remplis pour les lutins de bonne humeur. Deux lutins sont reliés s'ils sont amis. Les flèches indiquent à quel lutin chacun sourit.

On note $A(M,\ell)$ l'ensemble des nombres réalisables. Dans l'exemple précédent, on a donc $A(M,\ell) = \{\infty, 2, 3, 4, ...\}$.

1. Dans un premier temps, un lutin sourit à exactement deux de ses amis, en priorité aux lutins de mauvaise humeur (c'est-à-dire qu'il ne peut pas sourire à un lutin de bonne humeur s'il ne sourit pas à tous ses amis de mauvaise humeur). Déterminer $A(M,\ell)$ (qu'on notera $A_1(M,\ell)$ pour éviter les ambiguités) si le pays des Merveilles est un reseau d'amitié avec $a \in \mathbb{N}$ lignes et $b \in \mathbb{N}$ colonnes, avec $a, b \geq 2$, comme dans la Figure 2. Dans ce réseau, les sommets représentent les lutins et les arêtes représentent les liens d'amitié. On pourra distinguer les cas suivants :

a) Si le lutin initial ℓ a 2 amis (c'est-à-dire dans un coin) ;

b) Si le lutin initial ℓ a 3 amis (c'est-à-dire sur un côté) ;

c) Si le lutin initial ℓ a 4 amis (c'est-à-dire ni sur un coin ni sur un côté).

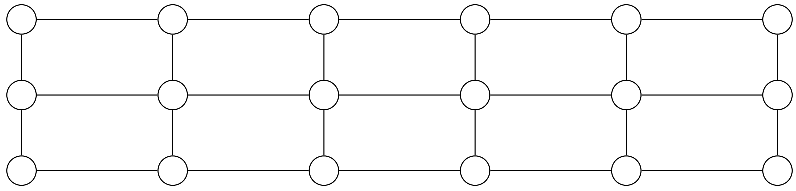

Figure 2. Le pays des Merveilles pour la question 1, avec $a = 3$ et $b = 6$.

2. Quels sont les ensembles E tels qu'il existe une disposition des lutins M et un lutin de départ $\ell \in M$ tels que $A_1(M,\ell) = E$?

3. Quels sont les ensembles E tels qu'il existe une disposition des lutins M telle que l'union sur tous les $\ell \in M$ de $A_1(M,\ell)$ soit égale à E ?

4. Pour cette question, on remplace la règle de la question 1. par la suivante : un lutin sourit à exactement deux de ses amis, en priorité aux lutins de bonne humeur. On note alors $A_2(M,\ell)$. Reprendre les questions 1. et 2.

Dorénavant, on supprime les règles de la question 1. et de la question 4. On fixe $p \in]0,1]$. Si $\ell \in M$ est un lutin de bonne humeur, alors, pour chaque $\ell' \in M$ tel que ℓ et ℓ' sont amis, ℓ fait un sourire à ℓ' avec une probabilité p. On note τ la variable aléatoire correspondant au numéro du premier jour où tous les lutins sont de bonne humeur (et $\tau = +\infty$ si ce jour n'existe pas).

5. Calculer, en fonction de n et p, l'espérance de τ :

a) Si chaque lutin est ami avec tous les autres ;

b) Si les lutins sont numérotés de 1 à n, et que chaque lutin ℓ_k a deux amis : les lutins ℓ_{k-1} et ℓ_{k+1} (les lutins ℓ_1 et ℓ_n sont également amis).

c) Si n est pair et la population des lutins est séparée en deux clans de taille $n/2$, tels que chaque lutin d'un clan est ami avec tous les lutins de l'autre clan, et seulement avec ceux-là. Pour cette question, déterminer également, à p fixé, la limite de l'espérance de τ quand $n \to \infty$;

d) Si M est le pays décrit dans la question 1 (ici, le résultat peut dépendre de a, b et du lutin de départ).

6. On fixe $p \in]0,1]$, $n \geq 3$ et $k \geq n-1$. On considère les pays des Merveilles M avec n lutins, k paires d'amis, et tels que, pour tous lutins ℓ et ℓ', il existe une chaîne d'amitié qui les relie. Parmi ces pays, que peut valoir, au maximum, l'espérance de τ :

a) Si $p = 1$?

b) Si $0 < p < 1$ et $k = n-1$?

c) Dans le cas général ?

7. Reprendre la question 6. en remplaçant « maximum » par « minimum ».

8. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

2. Drôles de toboggans

Dans un centre de loisirs aquatique, la direction a confié à l'ingénieure Emmy la construction d'une haute tuyauterie de toboggans de hauteur $H \in \mathbb{N}$ mètres. En haut, ses tuyaux présentent $N \geqslant 2$ entrées alignées et numérotées de 1 à N de même qu'en bas il y a N sorties alignées et numérotées de 1 à N. Pour que ce soit plus amusant, Emmy dispose des tuyaux suivants :

— des tuyaux droits, qu'on nommera **tuyaux de type I**, tels que ce qui rentre en position K sort également en position K ;

— des paires de toboggans voisins qui se croisent sans se rencontrer et échangent leurs sorties, qu'on nommera **paire de tuyaux de type $\mathcal{Z}$** : c'est-à-dire que ce qui rentre en position K sort en position $K+1$, et ce qui rentre en position $K+1$ sort en position K ;

— des paires de toboggans voisins qui fusionnent en un seul puis se séparent, qu'on nommera **paire de tuyaux de type $\mathcal{X}$** : c'est-à-dire que ce qui rentre en position K s'additionne avec ce qui rentre en position $K+1$, et le total ressort en proportions égales en K et $K+1$.

À chaque mètre, Emmy place une rangée composée d'une combinaison de son choix de tels tuyaux.

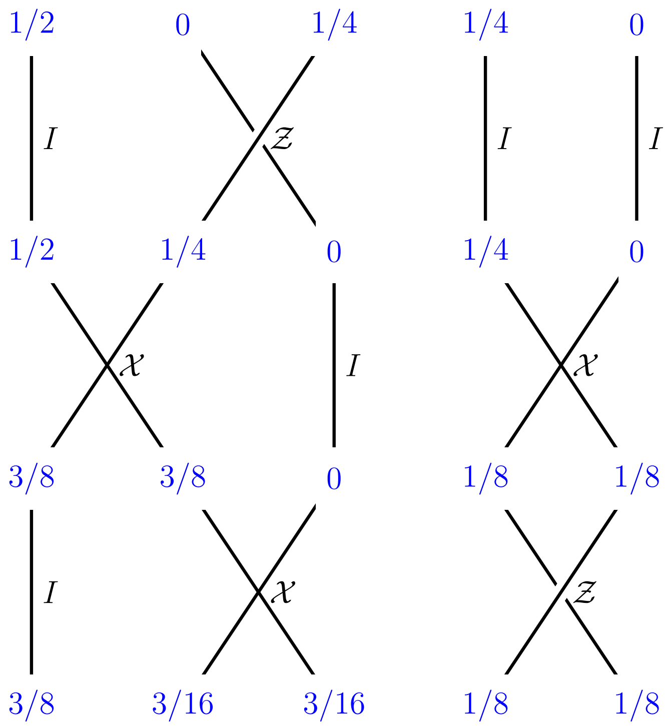

FIGURE 3. Une tuyauterie de toboggans de hauteur $H = 3$ avec $N = 5$ entrées. Les quantités d'eau à chaque étage sont indiquées en bleu, et le type de tuyau est indiqué à droite de chaque tuyau ou paire de tuyaux.

Pour le spectacle, on fait entrer une quantité totale de 1 litre d'eau dans les entrées, selon une répartition à fixer ultérieurement. Ensuite, l'eau descend dans les toboggans en suivant les règles ci-dessus. Enfin, l'eau débouche dans les tuyaux de sortie. On trouvera un exemple sur la figure 3.

1. Emmy voudrait qu'il sorte de l'eau de tous les toboggans. Pour quelles valeurs de N et H est-il possible de construire des toboggans qui font sortir de l'eau par toutes les sorties si

a) toute l'eau rentre dans un seul tuyau, et Emmy peut choisir dans lequel ;

b) elle fait rentrer la même quantité d'eau dans tous les tuyaux ;

c) toute l'eau rentre dans le tuyau 1 ;

d) 1/2 litre d'eau rentre dans le tuyau 1 et 1/2 litre d'eau rentre dans le tuyau N.

2. Pour que le spectacle soit grandiose, Emmy voudrait qu'il sorte la même quantité d'eau de tous les toboggans, et ce par toutes les sorties. Pour quelles valeurs de N et H est-il possible de construire des toboggans qui font sortir la même quantité d'eau par toutes les sorties si

a) l'eau rentre dans le tuyau 1 ;

b) la répartition de l'eau est arbitraire, et la construction du toboggan est indépendante de la répartition. Autrement dit, Emmy souhaite construire une tuyauterie de toboggans telle que, pour tout choix de répartition de l'eau en entrée, la tuyauterie fasse sortir la même quantité d'eau par toutes les sorties.

3. Pour cette question uniquement, le décor penche légèrement et, en traversant une paire de tuyaux de type $\mathcal{X}$, l'eau qui rentre en position K ou $K+1$ ressort en proportion P dans la position K et $(1-P)$ dans la position $K+1$, avec $0 \leqslant P \leqslant 1$. Reprendre la question 2. dans ce cadre.

4. Emmy choisit que toute l'eau rentre dans le tuyau 1 uniquement. On appelle **spectacle** la liste des quantités d'eau $(x_1,...,x_N)$ qui sortent de chaque tuyau, où x_i est la quantité d'eau qui sort du tuyau numéroté i. Par exemple, le spectacle correspondant à la figure 1 est : $\left(\frac{3}{8}; \frac{3}{16}; \frac{3}{16}; \frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right)$.

a) En fonction de N et H, combien de spectacles différents Emmy peut-elle réaliser ?

b) Emmy a appris qu'un collègue facétieux a décidé de mélanger les entrées juste avant le spectacle, après la construction de la tuyauterie (l'eau pourrait donc rentrer par n'importe quel tuyau, pas nécessairement le 1). Elle souhaite construire une tuyauterie qui réalise le spectacle qu'elle a choisi, indépendamment du tuyau par lequel son collègue fera rentrer l'eau. Combien de spectacles peut-elle réaliser dans ces conditions, toujours en fonction de N et H ?

c) Suite à une pénurie de matériel, Emmy ne dispose que d'une quantité limitée M de paires de tuyaux de type $\mathcal{X}$. En contrepartie, elle peut choisir H aussi grand qu'elle le souhaite, les tuyaux (ou paires de tuyaux) I et $\mathcal{Z}$ étant quant à eux disponibles en abondance. Combien de spectacles différents peut-elle réaliser dans ces conditions, en fonction de M et N ? (Heureusement, son collègue a décidé de la laisser tranquille pour cette fois.)

5. Emmy s'aperçoit que, si les spectateurs sont placés trop loin, ceux-ci ne peuvent pas distinguer deux spectacles qui diffèrent par une quantité d'eau suffisamment petite. Plus précisément, étant donné un $\varepsilon > 0$ fixé, on dit qu'Emmy réalise le spectacle $(x_1,...,x_N)$ **en apparence** lorsque la quantité d'eau $(y_1,...,y_N)$ qui sort effectivement des tuyaux vérifie $|x_i - y_i| \leqslant \varepsilon$ pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}$. On suppose toujours qu'Emmy fait rentrer toute l'eau dans le tuyau 1.

a) En fonction de $\varepsilon > 0$ et N, quels spectacles Emmy peut-elle réaliser en apparence, si elle peut choisir H comme elle le souhaite ?

b) Reprendre le point a) si on fixe également H.

6. Le collègue d'Emmy est de retour pour l'ennuyer. Là encore, il prévoit de mélanger les entrées juste avant le spectacle, mais cette fois-ci, Emmy dispose de nouveaux tuyaux pour l'aider. Plus précisément, elle dispose de tuyaux en Y à gauche, dits de type $\mathcal{Y}$ (respectivement à droite, dits de type $\reflectbox{$\mathcal{Y}$}$[1]), qui rassemblent l'eau rentrant en position K et $K+1$ pour la faire ressortir entièrement en K (respectivement en $K+1$). On trouvera une illustration à la figure 4. Combien de spectacles Emmy peut-elle réaliser (de façon exacte) dans ces conditions, en fonction de N et H ?

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

3. Plats à tarte gradués

Lors d'un tournoi de tartes, différentes familles veulent faire des découpages en parts égales. Chaque famille va fabriquer son propre moule à tarte sur lequel elle va indiquer des graduations qui correspondent aux endroits où il faut découper entre le centre et la graduation pour former des parts égales. C'est-à-dire que pour un nombre $u \in \mathbb{N}^*$, on va faire apparaître u fois un trait avec le numéro u indiqué sur le bord du moule à tarte formant un u-gone régulier inscrit dans le cercle.

Bien sûr, un même moule doit pouvoir avoir plusieurs graduations parce que le nombre u de parts de tarte qu'on voudra faire n'est pas toujours le même suivant le nombre de convives. On note alors $N \geqslant 2$ le nombre de numéros de graduations différentes qu'on veut faire apparaître

1. Si vous utilisez LaTeX, ce symbole peut s'obtenir en composant `\reflectbox{$\mathcal{Y}$}`, la commande `reflectbox` donnant l'image miroir de son argument.

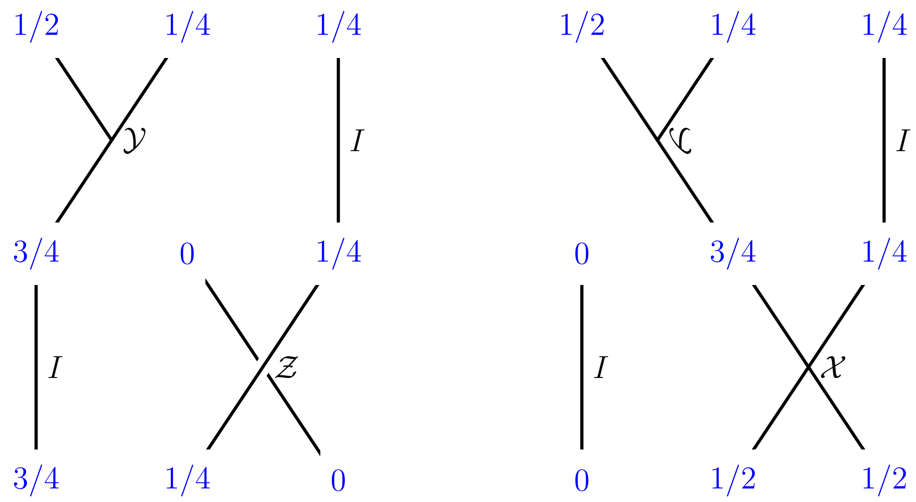

Figure 4. Portions de tuyauteries avec des tuyaux $\mathcal{Y}$ et ⅄

et $S = \{u_1, \cdots, u_N\}$ l'ensemble des numéros qu'on veut faire apparaître. On peut identifier le moule à tarte à un cercle (car on ne veut faire que des tartes rondes) et les graduations à des points de ce cercle.

Par exemple, pour $S = \{1,2,3,4,6\}$, il est possible d'utiliser 10 graduations, avec au plus 2 au même endroit, comme illustré par la figure suivante.

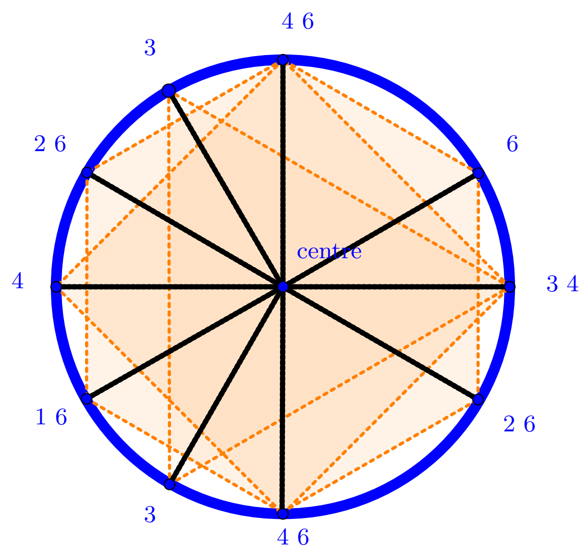

Figure 5. Cercle en bleu, le bord du plat à tarte et ses graduations
En noir, les endroits où il faudra couper en fonction du nombre de parts
En orange, les u-gones réguliers pour placer les graduations.

Il y a donc 10 graduations sur le plat à tarte avec au plus 2 au même endroit sur cet exemple.

1. On veut $N = 2$ graduations, c'est-à-dire que $S = \{a, b\}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ distincts. Quel est le nombre minimal de graduations à mettre sur le plat à tarte afin d'être capable de couper la tarte à la fois en a parts égales ou b parts égales ?

2. On veut maintenant $N = 3$ graduations, c'est-à-dire que $S = \{a, b, c\}$ avec $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ deux à deux distincts. Quel est le nombre minimal de graduations à mettre sur le plat à tarte afin d'être capable de couper la tarte à la fois en a parts égales, b parts égales ou c parts égales ?

Désormais, il y a différentes familles qui s'affrontent dans un tournoi de graduations de moules à tarte. Chaque famille doit choisir N valeurs distinctes à graduer $S = \{u_1, \dots, u_N\}$.

— La famille **Première** choisit de graduer les N premiers nombres premiers, soit $S_N^p = \{p_1, p_2, \cdots, p_N\}$.
— La famille **Géométrique** choisit un entier $a \geqslant 2$ et de graduer les puissances de a, soit $S_N^g = \{1, a, a^2, \cdots, a^{N-1}\}$.
— La famille **Complète** choisit de graduer les N premiers nombres entiers naturels, soit $S_N^c = \{1, 2, \cdots, N\}$.
— La famille **Divisée** choisit le plus petit entier α_N qui admet exactement N diviseurs $d_{1,\alpha_N}, \ldots, d_{N,\alpha_N}$ et choisit de graduer les N diviseurs de α_N, soit $S_N^d = \{d_{1,\alpha_N}, \cdots, d_{N,d_N}\}$.

Par exemple, si $N = 6$, on a :

— $S_6^p = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.
— $S_6^g = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ pour $a = 2$.
— $S_6^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
— $S_6^d = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ car $\alpha_6 = 12$.

3. Les familles choisissent un point initial sur le cercle sur lequel toutes les graduations apparaissent. La famille Première (resp. Géométrique, Complète, Divisée) compte alors le nombre de graduations G_N^p (resp. G_N^g, G_N^c, G_N^d) qui apparaissent sur tout le tour du plat à tarte avec les nombres de S_N^p (resp. S_N^g, S_N^c, S_N^d). Combien y aura-t-il alors de graduations :
a) G_N^p pour la famille Première ;
b) G_N^g pour la famille Géométrique ;
c) G_N^c pour la famille Complète ;
d) G_N^d pour la famille Divisée ?
Donner une valeur exacte ou un encadrement aussi précis que possible de ces valeurs pour les quatre familles.

Les familles cherchent à mettre le moins possible de graduations sur le plat à tarte. Elles se demandent si toutes les faire démarrer à la même origine est vraiment le plus efficace.

4. Peut-on trouver un exemple d'une famille $S_N^u = \{u_1, \cdots, u_N\}$ pour lequel il est possible de faire mieux quand les graduations ne démarrent pas toutes au même endroit
a) si $N = 3$?
b) si $N = 4$?
c) pour une autre valeur de N ?
d) Dans ce cas, estimer aussi précisément que possible le nombre $\widehat{G}_N^u$ de graduations qu'on peut mettre en fonction de N et de $S = \{u_1, \ldots, u_N\}$.

5. Lorsque ce minimum est atteint, pour chacune des quatre familles précédemment décrite, combien doit-on mettre de graduations au même endroit au minimum ?

6. Existe-t-il un entier N tel que pour $n > N$, l'ordre entre les nombres optimaux de graduations que peuvent mettre les quatre familles $\widehat{G}_n^p, \widehat{G}_n^g, \widehat{G}_n^c, \widehat{G}_n^d$ finit par être toujours le même. Si oui, quel est cet ordre ?

7. Existe-t-il une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $\widehat{G}_N^u \leqslant \min(\widehat{G}_N^p, \widehat{G}_N^g, \widehat{G}_N^c, \widehat{G}_N^d)$?

8. Proposer et explorer d'autres pistes de recherche.

* * *

4. Transformation de papillons

Pour embellir les différents tournois du $\mathbb{TFJM}^2$, le comité national d'organisation décide de faire un élevage de N papillons. À l'origine, le papillon numéro i a une envergure égale à x_i centimètres. Chaque jour, certains papillons subissent une transformation qui modifie leur envergure.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que tous les papillons ont une envergure initiale de 1 cm.

a) Chaque jour, un des papillons d'envergure maximale voit son envergure être divisée par deux. Combien de temps faudra-t-il pour que tous les papillons aient une envergure strictement inférieure à $0,5$ cm ? Et pour $0,1$ cm ?

b) Supposons que N est impair. Que se passe-t-il si la transformation divise par deux l'envergure d'un des papillons d'envergure médiane ?

2. Supposons que N est impair. Désormais, on suppose que les transformations alternent :

— La première transformation s'applique à l'un des papillons ayant une envergure médiane, qui perd alors la moitié de son envergure.

— La seconde transformation s'applique à l'un des papillons ayant une envergure médiane, qui gagne alors la moitié de son envergure.

Est-il vrai que, pour tout $M \in \mathbb{R}$, que l'un des papillon va finir par dépasser la taille M ?

3. Reprendre la question précédente si la seconde transformation multiplie l'envergure du papillon par 2 à la place.

Nous faisons désormais l'hypothèse que tous les papillons se transforment en même temps.

4. Chaque jour, chaque papillon se transforme en deux papillons : Le premier hérite de 80% de l'envergure du parent, et le second de 125%. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Estimer la proportion de papillons ayant une envergure supérieure à x le n-ième jour.

5. Chaque jour, chaque papillon se transforme en deux papillons, ce qui augmente. Le premier hérite de 80% de l'envergure de son parent, et le second de 125% de l'envergure de son grand-parent. Puisqu'il n'y a pas de grand parent à la première transformation, on supposera que le grand-parent a la même envergure que le parent. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Quelle est la proportion de papillons ayant une envergure strictement supérieure à x le n-ème jour ? (*On pourra commencer par regarder des valeurs particulières de x*)

6. Chaque jour, chaque papillon se transforme en deux papillons. Le pourcentage d'évolution de l'envergure des nouveaux papillons par rapport à leurs parents est tiré aléatoirement selon une loi de probabilité discrète fixée. Peut-on retrouver cette loi de probabilité en observant assez longtemps l'évolution des papillons ?

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

5. Gerrymandering

Afin de gagner les élections, Elbridge cherche à déplacer les capitales des différents districts vers les emplacements demandés par son parti, en le moins d'années possible.

Soit P une partie du plan, qui représente un pays, et $n \geq 2$. On appelle **configuration** un choix de n points distincts A_1, A_2, …, A_n, qui représentent les capitales des districts où pour une configuration donnée, on découpe P en n parties $D_1, \ldots, D_n$ que l'on appelle des districts : le district D_i est constitué de l'ensemble des points strictement plus proches de A_i que de tous les autres points.

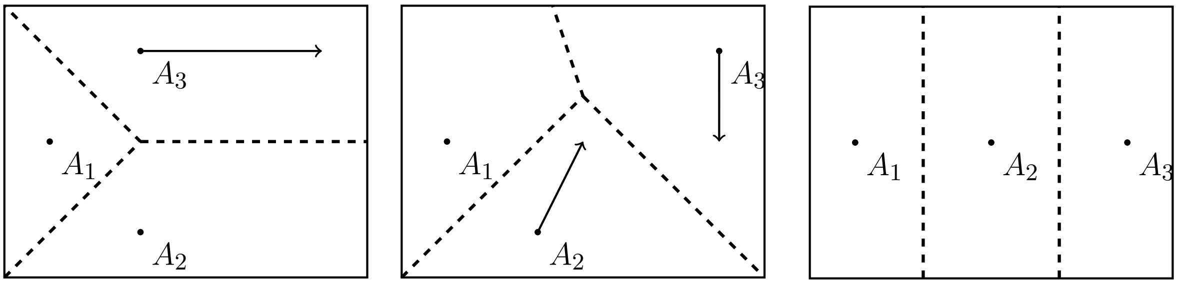

FIGURE 6. Exemple où P est l'intérieur d'un rectangle et $n = 3$. La troisième configuration est réalisable à partir de la première en 2 années (mais pas en 1 seule).

Chaque année, Elbridge peut déplacer, simultanément, chaque capitale A_i vers un nouvel emplacement $A'_i \in D_i$. On dit alors que $(A'_1, \ldots, A'_n)$ est **réalisable** à partir de $(A_1, \ldots, A_n)$ en 1 année. Ensuite le découpage de P en n districts est refait en fonction de cette nouvelle configuration. Plus généralement, on définit, pour une configuration C', le fait d'être réalisable à partir de C comme le fait qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que C' soit réalisable à partir de C en a années. Voir Fig. 6.

Dans un premier temps, on se place dans le cas où P est un cercle centré en l'origine. Par conséquent toutes les capitales sont situées à une même distance du centre de P.

1. A partir d'une configuration donnée, quelles configurations sont réalisables ?

2. On fixe n. On part de la configuration C où les capitales forment un polygone régulier centré en l'origine. La configuration où chaque capitale occupe la position symétrique par rapport à l'origine est-elle réalisable ? Si oui, déterminer (aussi précisément que possible), en fonction de n, la plus petite valeur de a telle qu'elle soit réalisable en a années.

3. On fixe n et un demi-cercle M de P. Existe-t-il une valeur a telle que, pour toute configuration C, il existe une configuration réalisable en a années où toutes les capitales appartiennent à M ? Si oui, déterminer (aussi précisément que possible), en fonction de n, la plus petite valeur de a qui convient.

4. On fixe n. Existe-t-il une valeur a telle que, pour toute configuration C et toute configuration C' réalisable à partir de C, C' est réalisable en a années à partir de C ? Si oui, déterminer (aussi précisément que possible), en fonction de n, la plus petite valeur de a qui convient.

5. Reprendre les questions précédentes, où P est le plan entier. Dans la question 3, M est un demi-plan.

6. Généraliser au cas des dimensions supérieures.

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

6. Le cauchemar de la ligne 20-25

Dans une contrée lointaine, les conditions de trafic se sont considérablement dégradées sur la ligne de bus 20-25, qui relie une importante gare ferroviaire à la cité universitaire, au grand dam des étudiants. On assiste notamment à des scènes spectaculaires où un bus est tellement bondé qu'il ralentit d'arrêt en arrêt, pour finir par se faire rattraper par celui qui le suit, avec parfois trois bus consécutifs se suivant à la queue leu leu. Face à ce problème, la société des transports TRAP a mandaté Antoine pour effectuer une analyse d'efficacité et proposer des pistes d'amélioration. La situation étant plutôt complexe (c'est le moins qu'on puisse dire !), Antoine décide de travailler sur un modèle simplifié. Il considère la ligne 20-25 comme une ligne droite, avec le dépôt situé en 0, puis un arrêt en chaque entier $n \geqslant 1$ (le dépôt n'est donc pas considéré comme un arrêt). Après quelques observations, il lui apparaît que les bus se déplacent à une vitesse moyenne initiale V_0, mais que leur vitesse moyenne diminue à mesure qu'ils chargent des passagers. Antoine observe que la vitesse moyenne d'un bus contenant k passagers (le chauffeur ne compte pas comme un passager) est donnée par

$$V_k = \frac{V_0}{1+\ln(k+1)}. \tag{1}$$

(Antoine considère que les bus se déplacent constamment à leur vitesse moyenne, et le temps passé aux arrêts est compris dans cette vitesse moyenne. Autrement dit, il fait comme si les bus se déplaçaient constamment à vitesse V_k, et lorsqu'ils atteignent un arrêt, ils embarquent tous les passagers qui s'y trouvent et changent de vitesse instantanément.) On suppose que les passagers ne descendent jamais, sauf lorsqu'ils arrivent à un terminus.

Les bus ne peuvent pas se dépasser : lorsqu'un bus rattrape son prédécesseur, il le suit à la même vitesse que lui (y compris si cela implique de rouler à une vitesse inférieure à sa vitesse moyenne), et en arrivant à un arrêt, les passagers sont répartis équitablement entre les bus (s'il devait y avoir plus de bus que de passagers, en supposant qu'il y a N passagers, chacun des N bus les moins remplis recevrait un passager). Si deux bus ont le même nombre de passagers, on commencera par remplir le bus qui est arrivé en premier. Par ailleurs, on suppose que les bus ont une capacité de transport infinie. Aussi, on suppose que les bus partent vides du dépôt.

1. Dans un premier temps, Antoine s'intéresse à ce qui se produit aux heures de pointe. Il considère qu'il y a N passagers à chaque arrêt, et que ceux-ci ne se remplissent pas par la suite. Deux bus quittent le dépôt, le premier au temps $t = 0$, le second démarrant quand le premier arrive au premier arrêt. Finissent-ils par se rattraper ?

2. Antoine se demande à présent ce qui se passe lorsque la journée commence, et que les arrêts se remplissent progressivement. Il considère donc toujours deux bus, un démarrant au temps $t = 0$, et le suivant démarrant quand le premier arrive au premier arrêt. Au temps $t = 0$, les arrêts sont tous vides, et se remplissent à un taux constant de ρ passagers par unité de temps. Lorsqu'un bus arrive à un arrêt, il récupère tous les passagers qui y sont arrivés depuis le passage du bus précédent, soit ρ multiplié par le temps écoulé (on permet un nombre non entier de passagers, pour simplifier la modélisation).

a) Les deux bus finissent-ils par se rattraper ?

b) Que se passe-t-il dans le cas où on fait démarrer m bus, le premier au temps $t = 0$, chaque bus suivant démarrant lorsque celui qui est parti juste avant lui a atteint le premier arrêt ?

3. Antoine étant bien conscient que la modélisation qui précède ne tient pas compte des petits aléas de la circulation ou des afflux imprévus de passagers, il souhaite désormais les inclure. Il considère donc les variantes suivantes.

a) Au temps $t = T$, le bus de tête est immobilisé pendant un intervalle de temps de $\frac{1}{10}$ en raison d'un embouteillage, avant de reprendre à vitesse normale.

b) Au temps $t = T$, une quantité q de passagers arrive à l'arrêt situé en $n = 10$ en plus du remplissage normal.

Toujours dans le cas de deux bus séparés d'une unité de temps, évaluer l'impact des deux perturbations ci-dessus sur la suite de leur parcours. (On discutera les résultats en fonction de T et q.)

4. Antoine souhaite à présent concevoir une stratégie pour retenir les bus aux heures de pointe, afin d'éviter qu'ils ne se rattrapent. On suppose donc à présent que, lorsqu'ils arrivent aux arrêts (et uniquement à ce moment), les bus peuvent s'arrêter et attendre un temps arbitraire avant de repartir à leur vitesse normale. Une **stratégie** est une façon pour le conducteur du bus de décider, en connaissance de la position de tous les bus, du nombre de passagers qu'ils transportent et du nombre de passagers à chaque arrêt, du temps à attendre lorsqu'ils arrivent à un arrêt. Pour ajouter davantage de réalisme à son modèle, Antoine souhaite également tenir compte du fait que les bus font plusieurs rotations sur le même trajet. Il considère donc que la ligne se termine à l'arrêt $n = 20$, considéré comme le dépôt de fin de ligne. Il n'y a aucun passager à cet arrêt, lorsqu'un bus l'atteint, il se vide de tous ses passagers, et repart dans l'autre sens. Il effectue ensuite des allers et retours sur le trajet, et à chaque fois qu'il atteint le dépôt en $n = 0$ ou en $n = 20$, il dépose tous ses passagers et repart dans l'autre sens. Il considère également qu'au temps $t = 0$, il y a N passagers à chaque arrêt et dans chaque sens, et qu'ensuite, les arrêts continuent à se remplir à un taux de ρ passagers par unité de temps.

On suppose que deux bus circulent sur la ligne, partant tous deux du dépôt en $n = 0$, le premier au temps $t = 0$, le second lorsque le précédent atteint le premier arrêt.

a) Existe-il une stratégie pour retenir les bus aux arrêts de façon à éviter qu'ils ne se rattrapent ?

b) Que se passe-t-il dans le cas de m bus, chaque bus après le premier partant lorsque le précédent a atteint le premier arrêt ?

Discuter de l'optimalité d'une éventuelle stratégie par rapport au temps de parcours voyageur (c'est-à-dire qu'on cherche à minimiser le temps écoulé entre l'arrivée d'un passager à un arrêt, et le moment où le bus le dépose au terminus).

5. Antoine cherche à explorer une dernière idée pour améliorer le temps de parcours voyageur. On se place à nouveau dans le cadre de la question 2, avec deux bus circulant, et où les arrêts sont initialement vides et se remplissent progressivement. On suppose qu'il y a une infinité dénombrable d'arrêts indexés par les entiers naturels. Antoine propose que le premier bus desserve uniquement les arrêts impairs, et le second uniquement les arrêts pairs.

a) Cette stratégie présente-t-elle un gain en terme de temps de parcours voyageur ? Le quantifier aussi précisément que possible.

b) Pour pousser son idée encore plus loin, Antoine suppose à présent qu'un bus démarre à chaque temps t entier, et que les bus parcourent les arrêts de k en k. Plus précisément, le premier bus dessert les arrêts multiples de k, le suivant les arrêts multiples de k plus 1, et ainsi de suite. Après k bus, le schéma se répète : le $(k+1)$-ème bus dessert les arrêts multiples de k, le $(k+2)$-ème bus dessert les arrêts multiples de k plus 1, et ainsi de suite. Quantifier le gain éventuel en termes de temps de parcours voyageur, et examiner ce qui se produit lorsque $k \to +\infty$.

c) Antoine décide de pousser son idée encore plus loin, et d'ajouter des arrêts, pour répartir les voyageurs sur davantage d'arrêts. Il suppose donc qu'il y a à présent un arrêt en $\frac{n}{k}$ pour chaque entier $n \geqslant 1$, et que les voyageurs arrivent aux arrêts à un taux de $\frac{\rho}{k}$ passagers par unité de temps. On considère toujours qu'un bus quitte le dépôt à chaque unité de temps. Quantifier l'impact de ce changement sur le temps de parcours voyageur, à la fois dans le cas où chaque bus dessert tous les arrêts et dans le cas où les bus desservent les arrêts de k en k. On s'intéressera particulièrement à ce qui se produit à la limite lorsque $k \to +\infty$.

6. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

7. Taxes routières

Dans un pays lointain, le roi Louis XLIX-III veut taxer les routes pour maximiser ses revenus. L'Association et Syndicat des Mécontents Routiers (ASMR) essaie de réduire autant que possible les frais pour le peuple.

Dans ce pays, il y a n villes ($n \in \mathbb{N}^*$). Certaines villes sont reliées par une route, formant ainsi le **système routier**. Le système des taxes est le suivant : toutes les villes se voient attribuer un numéro de 1 à n (chaque numéro est utilisé exactement une fois). La **taxe** à payer pour une route reliant une ville de numéro i à une ville de numéro j est le maximum entre i et j. Le **coût total** du système routier est la somme de toutes les taxes à payer pour chacune des routes. Ce coût total dépend de la manière de numéroter les villes. La Figure 7 montre deux exemples.

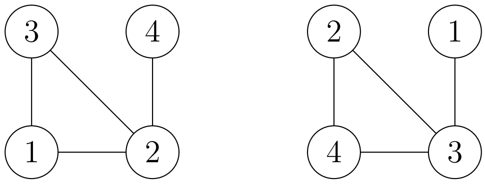

Figure 7. À gauche, un exemple de coût total 12. À droite un exemple de coût total 14.

1. Quelle est la valeur maximale et minimale du coût total s'il y a 4 villes formant un carré, illustré dans la Figure 8 ?

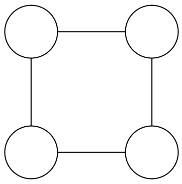

Figure 8. Le système routier carré.

2. Quelle est la valeur maximale et minimale du coût total pour les cas suivants (voir aussi Figures 9 et 10) ?
a) Système routier complet : pour chaque paire de villes, il y a exactement une route.
b) Système routier par paires : il y a $n = 2m$ villes qui sont reliées par paires.
c) Système routier en anneau : les n villes forment un anneau avec $n \geqslant 3$.
d) Système routier en grille : il y a $n = k^2$ villes formant une grille.

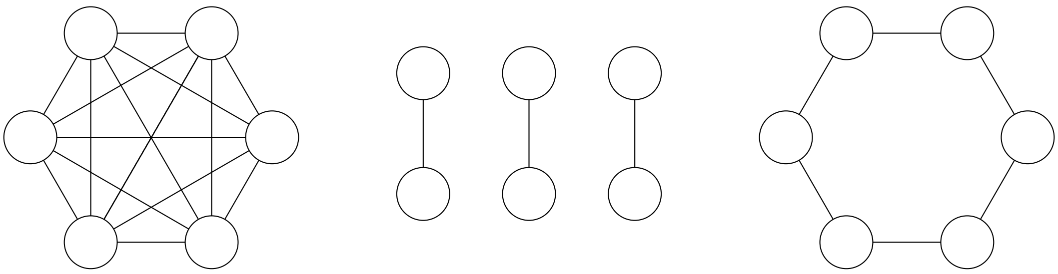

Figure 9. Système routier complet avec $n = 6$ (à gauche), par paires avec $m = 3$ (au milieu) et en anneau avec $n = 6$ (à droite).

3. Trouver des formules ou estimations pour le coût total maximal et minimal d'un système routier quelconque.

Après moultes grèves, le roi et l'ASMR s'accordent sur la manière suivante d'attribuer les numéros aux villes : à tour de rôle ils vont attribuer un numéro entre 1 et n à une ville. Ils n'ont pas le droit de réattribuer un nombre qui a déjà été utilisé, et ils ne peuvent pas attribuer un nombre à une ville qui ait déjà un numéro. Le roi commence. Le but pour le roi est d'obtenir le coût total le plus grand possible, tandis que l'ASMR cherche à obtenir le coût total le plus petit possible.

4. En reprenant les systèmes routiers des questions précédentes, décrire les stratégies du roi et de l'ASMR. Quel est le coût total du système routier quand les deux attribuent les numéros

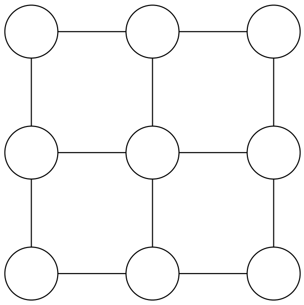

FIGURE 10. Système routier en grille avec $k = 3$.

d'une manière optimale ? Quel est le plus grand coût que le roi peut s'assurer d'obtenir quelle que soit la manière de jouer de l'ASMR ? De même, quel est le plus petit coût que l'ASMR peut s'assurer d'obtenir quelle que soit la manière dont le roi attribue les numéros ?"

Le roi Louis XLIX-III abuse de son pouvoir pour changer la taxe sur les route. Au lieu d'utiliser le maximum des deux numéros aux villes extrémales, il utilise une fonction f. Le coût total du système routier reste la somme des taxes de toutes les routes.

5. Reprendre les questions précédentes où le roi utilise pour la fonction f le produit des numéros.

6. Reprendre les questions précédentes où le roi utilise pour la fonction f le plus petit commun multiple des numéros.

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

8. Points colorés sur un cercle

Lucie a inventé un jeu pour deux joueurs. Les règles sont les suivantes.

Le jeu se déroule sur un cercle. Au départ, les points du cercle sont non colorés. L'un des deux adversaires est désigné pour jouer en premier. Chacun leur tour, Lucie et son adversaire choisissent un point, qui sera alors coloré en leur couleur respective : Orange pour Lucie, Bleu pour son adversaire. Lorsqu'ils jouent, il leur est interdit de choisir un point qui a déjà été coloré par l'un d'eux. Lucie convient à l'avance du **nombre de coups** que la partie durera. Tous deux jouent le même nombre de coups, de sorte que le nombre de coups est un entier pair, noté $2n$. Par exemple, si le nombre de coups vaut $2n = 6$ coups, ils joueront $n = 3$ coups chacun. La partie s'arrête donc lorsque les $2n$ coups sont joués.

À la fin de la partie, le cercle est découpé en arcs de cercle dont les extrémités sont soit orange, soit bleu. Dans une telle configuration, un **arc primitif** est un arc dont les deux extrémités sont colorées (en orange ou en bleue) et dont aucun autre n'est coloré (par exemple, le cercle tout entier, vu comme un arc de cercle, n'est jamais primitif). Les arcs primitifs dont les deux extrémités sont orange sont alors colorés en orange, et ceux dont les extrémités sont toutes deux bleues sont colorés en bleu. Le gagnant est alors celui étant parvenu à former l'arc de cercle non nécessairement primitif le plus long entièrement coloré de sa propre couleur. S'il y a égalité de tels arcs, ou s'il n'en existe aucun, la partie est déclarée nulle.

Dans tout le problème, on appelle **stratégie** une manière déterministe de décrire quoi jouer en fonction des coups qui ont été joués précédemment. Autrement dit, une stratégie est un algorithme qui indique quel coup jouer en fonction de la situation courante, de sorte que, dans deux situations identiques, il indiquera toujours le même coup à jouer.

Comme Lucie n'aime pas perdre, elle commence par se choisir pour adversaire l'Idiot du Village. Ce dernier portant bien son nom, il joue ses coups aléatoirement, sans réfléchir. Chaque coup joué suit alors une loi uniforme sur le cercle. Lucie cherche alors des stratégies qui maximisent sa probabilité de gagner contre cet adversaire.

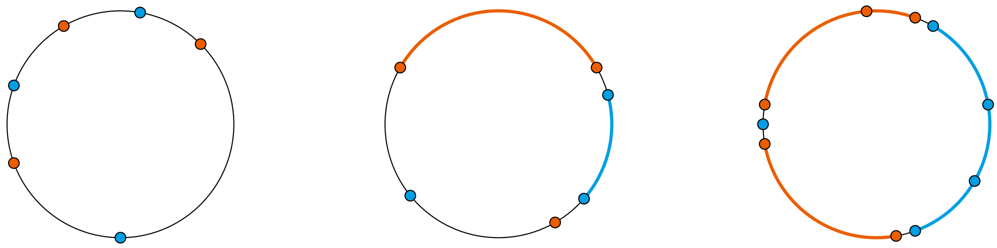

Figure 11. Deux fins de partie pour $2n = 6$ et une pour $2n = 10$. À gauche, il n'y a pas d'arcs colorés ; la partie est donc nulle. Au centre, Lucie (en orange) gagne : elle a réussi à construire un arc de taille maximale. À droite, l'adversaire (en bleu) gagne car il a formé un arc (non primitif) bleu de taille maximale.

Lucie et son adversaire conviennent de commencer par fixer $2n = 4$.

1. Est-ce que si Lucie laisse son adversaire jouer en premier, elle dispose d'une stratégie lui permettant de gagner avec certitude ?

2. Après qu'elle gagne une partie, son adversaire la laisse jouer en premier.

a) Lucie dispose-t-elle d'une stratégie lui permettant de gagner quoi qu'il advienne ?

b) Étudier l'ensemble des $p \in [0, 1]$ tels qu'il existe une stratégie permettant à Lucie de gagner avec une probabilité exactement p.

c) Même question pour des probabilités de ne pas perdre.

3. Lucie et son adversaire choisissent désormais $2n > 4$.

a) Reprendre la question précédente pour $2n > 4$. On pourra commencer par le cas $2n = 6$.

b) Même question pour des probabilités de ne pas perdre.

Lucie propose de changer les règles. Ils conviennent d'un entier k, et les règles sont changées de sorte que l'adversaire de Lucie place k points plutôt que n. L'adversaire de Lucie placera tous ses points en premier. Ce dernier joue toujours aléatoirement sur le cercle, mais avant Lucie, de sorte que cette dernière a alors toute la liberté de choisir où placer ses points. Lucie a donc plus d'information que son adversaire, mais en contrepartie, ce dernier peut placer plus de points qu'elle.

4. En fonction de n et k, Lucie dispose-t-elle d'une stratégie lui permettant de gagner avec probabilité 1 ?

Pour essayer, Lucie et son adversaire reprennent exactement la même configuration que la précédente, mais en échangeant les rôles. Lucie place k points, son adversaire en place n. Ce dernier joue toujours aléatoirement, et Lucie place tous ses points en premier.

5. Étudier l'ensemble des $p \in [0, 1]$ tels qu'il existe une stratégie permettant à Lucie de gagner avec une probabilité exactement p.

Fatiguée de jouer avec l'Idiot du Village, Lucie se trouve un adversaire à sa taille : Lucien. L'un des deux joueurs est désigné pour jouer en premier, et $2n \in \mathbb{N}$ est fixé. La règle du tour-par-tour est alors appliquée. Lucien commence à jouer.

6. L'un des deux joueurs dispose-t-il d'une stratégie lui permettant de gagner à coup sûr ? Si oui, en décrire une.

7. Reprendre le problème si Lucie avait convenu dès le départ que le gagnant n'était non pas celui ayant l'arc le plus long, mais celui étant parvenu à maximiser la somme des longueurs des arcs primitifs de sa couleur.

8. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *